

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS FÍSICAS

**ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA DE CIRCUITOS  
DE QUBITS SUPERCONDUCTORES**

**Mariano Bonifacio**  
Maestrando

**Dra. María José Sánchez**  
Directora

**Miembros del Jurado**  
Dr. Axel Bruchhausen (Instituto Balseiro)  
Dr. Daniel García (Instituto Balseiro)  
Dr. Leandro Tosi (Centro Atómico Bariloche)

16 de Diciembre de 2019

Teoría de la Materia Condensada – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



# Índice de contenidos

Índice de contenidos	iii
Resumen	v
Abstract	vii
Manual de Instrucciones y Advertencias	1
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Tecnologías cuánticas . . . . .	5
1.2. Electrodinámica Cuántica de Cavidad y de Circuito . . . . .	6
1.3. Sistema de estudio . . . . .	7
<b>2. cQED: Descripción de los componentes físicos</b>	<b>9</b>
2.1. El <i>qubit</i> . . . . .	9
2.2. <i>Qubits</i> superconductores . . . . .	10
2.3. El <i>qubit</i> de flujo . . . . .	11
2.4. Línea de transmisión de microondas . . . . .	13
2.5. <i>Qubit</i> de flujo forzado y acoplado a la línea de transmisión . . . . .	15
<b>3. Hamiltonianos modelos <i>qubit</i>-resonador</b>	<b>17</b>
3.1. Hamiltoniano de Rabi . . . . .	18
3.2. Modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	24
<b>4. Interferometría de Landau-Zener-Stückelberg y Formalismo de Floquet</b>	<b>29</b>
4.1. Interferometría LZS . . . . .	30
4.1.1. Probabilidad de transición y resonancias . . . . .	31
4.2. Formalismo de Floquet . . . . .	37
4.2.1. Probabilidades de transición . . . . .	39
4.2.2. Ejemplo de aplicación: <i>qubit</i> forzado aislado . . . . .	40
<b>5. Modelo de JC: Resultados para el sistema forzado sin disipación</b>	<b>43</b>

<b>6. Efectos de la disipación en la dinámica del sistema forzado</b>	<b>53</b>
6.1. Ecuación Maestra de Floquet-Born-Markov . . . . .	53
6.2. Evolución temporal y probabilidades de transición . . . . .	56
6.3. Modelo de Caldeira-Leggett . . . . .	57
6.4. Aplicación al sistema de estudio . . . . .	59
6.4.1. Resonador incluido como parte del sistema . . . . .	60
6.4.2. Resonador incluido como parte del baño . . . . .	60
<b>7. Resultados para cQED con disipación</b>	<b>63</b>
7.1. Resultados con $g=0.00015$ . . . . .	65
7.1.1. Comparación con el abordamiento de baño estructurado . . . . .	72
7.2. Resultados con $g=0.009$ . . . . .	73
<b>8. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>77</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Resumen

En este trabajo analizamos la arquitectura de cQED para el caso en que un *qubit* superconductor de flujo está sujeto a un forzamiento armónico en el flujo magnético y se encuentra acoplado capacitivamente a una guía de transmisión de microondas, la cual se comporta como un resonador fotónico. En particular estudiamos la dinámica para dos escenarios posibles:

- El caso ideal en ausencia de disipación: consideramos el Modelo de Jaynes-Cummings forzado para describir la interacción *qubit*-resonador y resolvemos la dinámica del sistema compuesto mediante el Formalismo de Floquet.
- El caso más realista en que el sistema interactúa con el entorno y como consecuencia el resonador sufre pérdidas de fotones: consideramos una interacción tipo Rabi entre el *qubit* y resonador, y utilizamos la Ecuación Maestra de Floquet-Born-Markov para resolver la evolución temporal.

El principal interés y motivación a lo largo de esta tesis es el estudio de las transiciones entre los estados del *qubit*, considerado como sistema de dos niveles, las cuales son inducidas por el forzamiento periódico y resultan fuertemente dependientes del estado del resonador. Hemos obtenido resultados numéricos y analíticos aplicando lo que se conoce como Interferometría de Amplitud de Landau-Zener-Stückelberg. Estos resultados demuestran la posibilidad de obtener información respecto al estado del resonador y su interacción con el *qubit* y con el entorno, a partir de la manipulación y mediciones sobre el *qubit*. Los resultados obtenidos resultan potencialmente aplicables a la realización de Tecnologías Cuánticas en el área de cQED y también son generalizables a diversos sistemas físicos descritos por el mismo modelo efectivo. Por ejemplo, se pueden considerar diferentes tipos de *qubits* superconductores, puntos cuánticos y resonadores mecánicos.

**Palabras clave:** INFORMACIÓN CUÁNTICA, *QUBITS* SUPERCONDUCTORES, ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA DE CIRCUITOS, SISTEMAS CUÁNTICOS ABIERTOS CON FORZAMIENTO PERIÓDICO



# Abstract

In this work we analyze the cQED architecture for the case of a superconducting flux qubit that is subject to a harmonic driving in the magnetic flux and is capacitively coupled to a transmission waveguide, which behaves like a photonic resonator. In particular we study the dynamics for two possible scenarios:

- The ideal case in absence of dissipation: we consider the Jaynes-Cummings Model to describe the qubit-resonator interaction and solve the dynamics of the composite system through Floquet Formalism.
- The more realistic case in which we take into account that the system interacts with the environment and, as a consequence, the resonator suffers photon losses: we consider the Rabi interaction between qubit and resonator, and use the Floquet-Born-Markov Master Equation to solve the time evolution.

The main interest and motivation throughout this thesis is the study of the transitions between the qubit states, considered as a two-level system, which are induced by the external driving and turn out to be strongly dependent on the state of the resonator. We have obtained numerical and analytical results by applying Landau-Zener-Stückelberg Amplitude Interferometry. These results demonstrate the possibility of obtaining information regarding the state of the resonator and its interaction with the qubit and with the environment, by manipulating and measuring the qubit. The results obtained are potentially applicable to Quantum Technologies in the area of cQED and are also generalizable to various physical systems described by the same effective model. For example, different types of superconducting qubits, quantum dots and mechanical resonators can be considered.

**Keywords:** QUANTUM INFORMATION, SUPERCONDUCTING QUBITS, CIRCUIT QUANTUM ELECTRODYNAMICS, PERIODICALLY DRIVEN OPEN QUANTUM SYSTEMS





# Manual de Instrucciones y Advertencias

Usted acaba de adquirir una tesis de maestría en Ciencias Físicas equipada con 8 capítulos que intentan cumplir con el ambicioso objetivo de ser autocontenidos. No obstante, si no entendiera alguno de los temas que aquí se tratan, no dude en consultar a su autor, quien intentará no confundirlo aún más.

## CARACTERÍSTICAS DEL TRABAJO

Posiblemente se encuentre leyendo esto porque sienta inquietud por emprenderse en el vasto y atractivo mundo de la Computación Cuántica y se enteró, de alguna manera, que una de sus numerosas aristas es la Electrodinámica Cuántica de Circuitos. En este punto me voy a tomar la libertad y el atrevimiento de apostar que, si Ud. es aún estudiante de grado, quizás su único conocimiento previo en el tema sea que existen objetos llamados *qubits* que sirven para llevar a cabo tareas asombrosas, imposibles de resolver utilizando computadoras clásicas. Seguramente oyó hablar de su prometedor potencial para concretar infinidad de aplicaciones que pueden mejorar el bienestar de la humanidad por un lado, pero que también van a imponer nuevos desafíos en el manejo de información secreta. Si Ud. está leyendo este trabajo en un momento suficientemente alejado de su fecha de publicación, es posible que ya sea espectador (o no) de alguna de todas estas promesas cuánticas que se escuchan por ahí y que atraen el dinero de los inversionistas y las grandes empresas. Cualquiera sea el caso, este trabajo debe entenderse como una guía que pretende brindar al lector por un lado conceptos más o menos concretos sobre cQED para que se lleve una idea del tema y por otro proveer también de un pequeño arsenal de herramientas generales sumamente interesantes para la cartera de la dama y el bolsillo del caballero. Le prometo que si se queda hasta el final, va a aprender cosas que nunca le contaron cuando tomó cursos de Mecánica Cuántica, y que respresentan áreas de investigación en sí mismas. Una de ellas es el Formalismo de Floquet, que se utiliza para estudiar sistemas con forzamiento periódico en el tiempo. La otra se trata del estudio de Sistemas Cuánticos Abiertos, cuyo objetivo mayor es entender y describir los efectos debidos a la interacción (generalmente

indeseada) del sistema de interés con el entorno amplio y fluctuante. Dicho esto, queda en Ud. la decisión y el riesgo de continuar leyendo. Le advierto que puede llevarse sorpresas! Puede ocurrir que este trabajo no cumpla con sus expectativas respecto a lo que pensaba que era investigar algo relacionado con la Computación Cuántica, pero quizás también sea ésta la puerta de entrada a ramas de la Física cuya existencia Ud. desconocía y que lo van a maravillar.

## USOS DE ESTE EJEMPLAR

El trabajo que Ud. tiene entre manos le puede proveer el más variado espectro de posibilidades en lo que hace a su uso. Permítame enumerarle aquellos con los que ha sido concebido por el autor. He aquí las distintas alternativas:

- Ud. quiere enterarse de **todo** lo que hizo el autor: Léase el trabajo completo, sin saltar ningún renglón y también todas las referencias.
- Ud. está aburrido y en un momento libre, como quien no quiere la cosa, tiene ganas de leer un poquito para ver de qué se trata: Lea la Introducción (son tres páginas, no sea vago)
- Ud. es un ser matemático que no quiere perder tiempo leyendo detalles de experimentos que nunca va a ver ni realizar en su vida y sólo le interesa hacer Física Teórica como una forma de ejercer sus habilidades matemáticas. En ese caso comience en la sección 2.5 donde le muestro el Hamiltoniano efectivo con el que voy a trabajar de ahí en adelante. Así de fácil, se olvida de todo lo demás.
- Ud. es de las personas a las que le gusta que se les explique todo con los dedos sin sentarse a hacer ninguna cuenta. En ese caso deléitese con el capítulo 4, en el que intento convencerlo de que podemos entender el espectro de energías de un Hamiltoniano que no se puede diagonalizar analíticamente, utilizando únicamente un manojito de gráficos y el poder de la palabra (yo me convencí!).
- A Ud. le dijeron que va a tener que aprender a usar el Formalismo de Floquet o la Ecuación Maestra de Floquet-Born-Markov para aplicar luego a un sistema físico que no tiene nada que ver con los *qubits* superconductores ni con resonadores fotónicos. Diríjase entonces a los capítulos 4 y 5 donde hago el desarrollo más pesadito de las herramientas generales que uso a lo largo del trabajo. No olvide descargarse todas las referencias para que le den una explicación mejor que la que le ofrezco yo.
- La fuerza impulsora que lo trajo hasta aquí no es la curiosidad, Ud. piensa que la Computación Cuántica es un *hot topic* y que trabajar en eso le va a garantizar

un futuro exitoso y con buen rédito económico. Deje de soñar, la Academia no funciona así, para eso vaya a conseguirse un trabajo en YPF que seguro lo aceptan fácil y gana bien desde el principio. Eso sí, si después se aburre, no se queje.

## ESPECIFICACIONES

**Dimensiones:** 30 cm x 21 cm x 1.5 cm

**Páginas:** Del orden de 80, no me pida que le dé una incerteza porque yo no soy experimental <sup>1</sup>.

**Figuras:** 45

**Referencias:** Más de las que Ud. y yo podríamos desear, se lo aseguro.

**Rango de temperatura tolerada:** -10°C a 233°C (después se quema).

---

<sup>1</sup>Lo intenté pero no pude lograrlo. . .



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Tecnologías cuánticas

El objetivo de las tecnologías cuánticas es manipular sistemas cuánticos de alta complejidad para utilizarlos con diferentes finalidades, tales como sensores, encriptación, simulación de sistemas físicos, implementación de algoritmos de optimización, etc [1, 2]. El origen de estas disciplinas se debe buscar en la década del 80, impulsado por un grupo de pioneros entre los que se encuentran Richard Feynman, Paul Benioff y David Deutsch, entre otros [1, 3-5]. Inicialmente estas ideas permanecieron en el plano de la teoría, debido a las grandes dificultades para poder producir experimentalmente estados cuánticos aislados, sin que el entorno destruya sus propiedades cuánticas esenciales: superposición y entrelazamiento. En las últimas dos décadas se han realizado avances experimentales que posibilitaron la manipulación de tales sistemas. Sin embargo sigue siendo de gran importancia el estudio del ruido introducido por el entorno, ya que los efectos de decoherencia están presentes y son relevantes en cualquier experimento realista [6].

El bloque elemental para el Procesamiento de Información Cuántica (QIP) es el *qubit*, que consiste en un sistema cuántico de dos niveles. Existen diferentes implementaciones de *qubits*, cada una de las cuales presenta ventajas y desventajas de acuerdo a la aplicación que se busca. Un ejemplo son los iones fríos, que se pueden disponer en arreglos mediante la utilización de láseres. Por un lado estos sistemas se pueden aislar del entorno en forma muy efectiva, obteniendo tiempos de coherencia largos. Sin embargo resulta difícil entrelazarlos entre sí. En particular, una de las implementaciones más prometedoras consiste en circuitos superconductores, que están formados por junturas Josephson y componentes electrónicos. Los mismos se comportan como resonadores no lineales en los cuales se pueden aislar el nivel fundamental y el primer excitado para utilizarlos en forma efectiva como sistema de dos niveles. Aunque estos *qubits* son más sensibles a los efectos del entorno, es posible entrelazarlos con mayor facilidad y han

demostrado ser una propuesta robusta debido a las ventajas de escalabilidad [6, 7].

En el presente trabajo nos enfocaremos en los llamados *qubits* de flujo, que consisten en un anillo superconductor interrumpido por una o varias junturas Josephson y que es atravesado por un flujo magnético. Si se aplica un flujo externo oscilante de frecuencia fija y amplitud variable, es posible forzar el *qubit* generando oscilaciones en las poblaciones de sus dos niveles de energía a través de las denominadas transiciones de Landau-Zener-Stückelberg (LSZ) [8]. Este procedimiento se conoce como Interferometría de Amplitud y será explicado en profundidad más adelante.

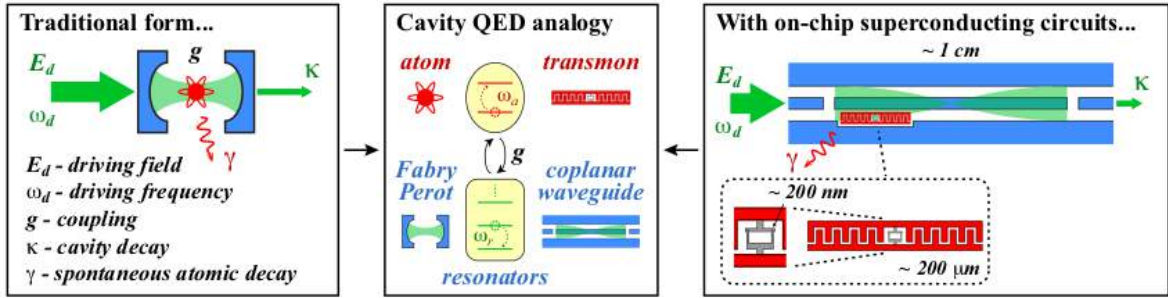
## 1.2. Electrodinámica Cuántica de Cavidad y de Circuito

En 2012 el Premio Nobel de Física fue entregado a Serge Haroche y a Dave Wineland por sus innovadores métodos experimentales que permitieron la medición y manipulación de sistemas cuánticos individuales dentro del área de Electrodinámica Cuántica de Cavidad (*Cavity QED*). Esta disciplina estudia la interacción entre un átomo como sistema de dos niveles y el campo electromagnético cuantizado dentro de una cavidad óptica. En los experimentos usualmente se hace transitar el átomo a través de la cavidad, tiempo en el cual interactúa con los fotones y luego se infiere información sobre el estado del átomo a partir de mediciones en la cavidad [6, 9].

Inspirada en la Electrodinámica Cuántica de Cavidad, ha aparecido una nueva disciplina sumamente activa en las últimas décadas, tanto teórica como experimentalmente. Se trata de la Electrodinámica Cuántica de Circuitos (*Circuit QED*), en la cual se reemplazan los átomos por *qubits* superconductores, también denominados átomos artificiales, y la cavidad por líneas de transmisión de microondas (resonadores) [9-12]. Estos circuitos proveen una arquitectura eficiente para la implementación en tecnologías cuánticas de estado sólido, además de abrir un nuevo camino para el estudio de la física de entrelazamiento y mediciones cuánticas con sistemas mesoscópicos [9].

La Figura 1.1 muestra un esquema comparativo entre las arquitecturas de la Electrodinámica Cuántica de Cavidad y de Circuito. En ambos se tiene un elemento atómico de dos niveles y un oscilador armónico, que se encuentran acoplados. En la Electrodinámica Cuántica de Cavidad el átomo se acopla al campo electromagnético a través de su momento dipolar eléctrico, mientras que al utilizar átomos artificiales existen diferentes alternativas de acoplamiento, por ejemplo capacitivo o inductivo.

Cuando el acoplamiento entre el *qubit* y el resonador es fuerte, existen dos regímenes diferentes en los cuales se suele operar: el **régimen resonante** y el **régimen dispersivo**. En el primer caso la separación entre los dos niveles de energía del *qubit* está en resonancia con la frecuencia de la línea de transmisión. De esta manera se generan



**Figura 1.1:** Esquema de comparación entre las arquitecturas de Electrodinámica Cuántica de Cavidad y de Circuito. Extraído de [6]

estados entrelazados *qubit*-fotones, y ambas partes del sistema pueden intercambiar excitaciones [11].

En el régimen dispersivo, la frecuencia de la línea de transmisión difiere de la separación entre los niveles de energía del *qubit*. En esta situación los niveles de energía del *qubit* van a depender del estado de los fotones y viceversa. Como consecuencia el resonador se puede utilizar para obtener información del estado del *qubit* y para acoplar múltiples *qubits* entre sí [11].

### 1.3. Sistema de estudio

En las dos secciones anteriores mencionamos que por un lado es posible forzar periódicamente los niveles de energía de un *qubit* modificando el flujo magnético que lo atraviesa y que por otra parte también se pueden acoplar los *qubits* a una línea de transmisión.

En este trabajo realizamos un abordamiento teórico, reportando resultados analíticos y numéricos para el problema de un *qubit* acoplado capacitivamente a una guía de transmisión, sujeto a un forzamiento armónico en el flujo magnético que lo atraviesa, para frecuencias y amplitudes arbitrarias. En particular estudiamos las transiciones entre los dos niveles de energía del *qubit* inducidas por el estado de los fotones en la línea de transmisión y por el forzamiento. Consideramos también los efectos de decoherencia introducidos por el entorno. El análisis de estos efectos es de fundamental importancia ya que en las realizaciones experimentales su contribución es importante.





# Capítulo 2

## cQED: Descripción de los componentes físicos

### 2.1. El *qubit*

Un bit cuántico o *qubit* es la unidad básica de información cuántica y consiste en cualquier sistema cuántico con espacio de Hilbert de dimensión 2. Usualmente se suele trabajar con la denominada *base computacional*, conformada por los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . Estos estados lógicos no están relacionados necesariamente de manera obvia con los autoestados del sistema, simplemente son una base que se define para codificar la información. De esta forma cualquier estado normalizado se puede expresar como  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos números complejos que satisfacen  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  [6].

En el presente trabajo reemplazamos las etiquetas  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  por  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  en analogía con los estados de espín *up* y *down*, esta notación aparece ampliamente en la literatura [9, 13].

Algunos ejemplos de sistemas físicos que permiten la implementación de los *qubits* son: El espín del electrón, átomos fríos, fotones polarizados, puntos cuánticos y *qubits* superconductores basados en junturas Josephson, entre otros [7].

Quisiéramos mencionar que los átomos naturales (iones atrapados y átomos neutros) han demostrado ser candidatos muy buenos para su manipulación con gran precisión. Los mismos se pueden enfriar y disponer en redes ópticas utilizando láseres, y poseen niveles de energía no equiespaciados bien definidos y ampliamente estudiados. De estos se intenta aislar dos niveles suficientemente alejados del resto, de manera que no haya transiciones con los demás y que el átomo se comporte en forma efectiva como un sistema de dos niveles. Otra de las características que los vuelve atractivos es su débil interacción con el entorno, lo cual se traduce en tiempos de coherencia largos. Sin

embargo acoplarlos entre sí para realizar operaciones de múltiples *qubits* puede resultar un desafío [7].

Adicionalmente tenemos a los *qubits* superconductores, también conocidos con el nombre de átomos artificiales, los cuales presentamos en la siguiente sección.

## 2.2. *Qubits* superconductores

Los *qubits* superconductores consisten en sistemas mesoscópicos que presentan comportamiento intrínsecamente cuántico: tienen niveles de energía cuantizados de modo que su separación es mayor que las fluctuaciones térmicas y pueden encontrarse en estados superposición[14]. El factor común a todos ellos es que se realizan con componentes superconductores y junturas Josephson, las cuales introducen anarominicidad al sistema, obteniendo así niveles de energía no equiespaciados. Al igual que en las propuestas con átomos fríos, se intenta trabajar efectivamente con dos niveles de energía aislándolos del resto. A diferencia de los átomos naturales, estos *qubits* pueden ser diseñados, fabricados y controlados variando sus parámetros, lo cual ofrece enormes ventajas y flexibilidad para diferentes propósitos, convirtiéndolos en candidatos muy prometedores para el desarrollo de arquitecturas escaleables a un gran número de *qubits* [7, 10].

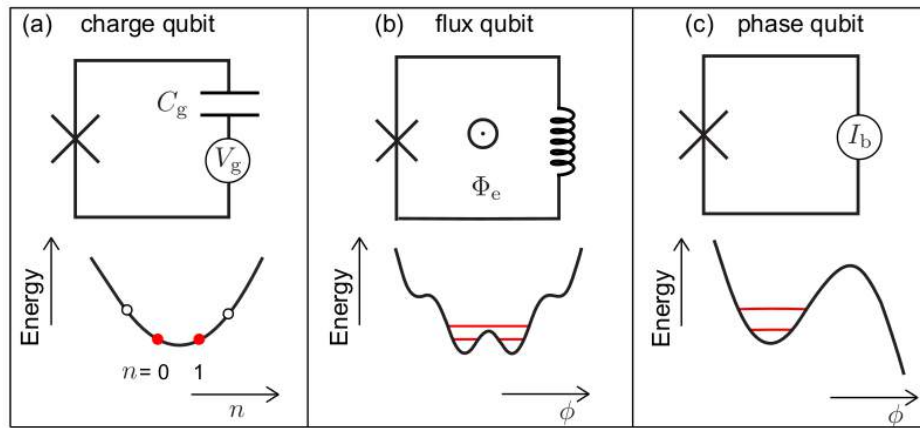
De acuerdo a la teoría BCS, en un superconductor los electrones forman pares de Cooper (con carga  $2e$ , masa  $2m_e$  y espín 0) que son los responsables de llevar la supercorriente. Una juntura Josephson está compuesta por dos electrodos superconductores, separados por una delgada capa de material aislante, que puede ser atravesada por los pares de Cooper mediante efecto túnel. A fines prácticos la juntura se comporta como un inductor no lineal y es el elemento fundamental de estos dispositivos [10, 11].

Hay tres tipos básicos de *qubits* superconductores que se diferencian por la relación entre sus parámetros característicos y que determina cuál es la variable cuántica bien definida con la que se codifica la información. Estos son los *qubits* de carga, de flujo y de fase, los cuales mostramos esquemáticamente en la Figura 2.1.

Los *qubits* de carga (o cajas de pares de Cooper) están formados por una pequeña isla superconductora conectada a tierra a través de una o dos junturas Josephson. Utilizando un capacitor se aplica un voltaje a la isla para controlar la separación entre los niveles de energía. La información se codifica a partir del número de pares de Cooper en la isla, que al ser suficientemente pequeña hace que la diferencia entre tener un par de Cooper de más o de menos genere un cambio apreciable en la energía del sistema.

Los *qubits* de fase consisten en una juntura Josephson polarizada por una fuente de corriente *DC* que se utiliza para controlar el potencial [10, 11].

La versión más simple del *qubit* de flujo consiste en un anillo superconductor interrumpido por una juntura Josephson. En la siguiente sección describiremos este tipo



**Figura 2.1:** Diagramas esquemáticos de los tres tipos básicos de *qubits* superconductores y su energía potencial. (a) *qubit* de carga, (b) *qubit* de flujo y (c) *qubit* de fase. Extraído de [10]

de *qubit* en mayor profundidad, dado que es el que nos va a interesar para este trabajo.

### 2.3. El *qubit* de flujo

Esta sección está basada en la Referencia [6], en la misma daremos una descripción de los fenómenos físicos más importantes involucrados en la realización de un *qubit* de flujo y haremos una deducción que nos permitirá tratar el mismo mediante un Hamiltoniano efectivo de  $2 \times 2$ .

En un anillo superconductor, el estado de todos los pares de Cooper del condensado se describe a través de una única función de onda total  $\psi_{\vec{P}} = \psi e^{i\vec{P}\cdot\vec{r}/\hbar}$ . En esta expresión  $\vec{P}$  es el momento de cada uno de los pares de Cooper,  $|\psi|^2$  es la densidad de pares de Cooper y  $\vec{P}\cdot\vec{r}/\hbar$  es la fase asociada a cada punto del espacio. Debido al hecho de que esta función de onda debe ser univaluada, el cambio de fase acumulada al recorrer un camino cerrado alrededor del anillo debe ser un múltiplo de  $2\pi$ , es decir  $\Delta\varphi = n2\pi$ . Existen tres efectos que pueden generar una diferencia de fase superconductora alrededor del circuito:

- Debido al efecto Josephson: cuando los pares de Cooper atraviesan coherentemente una juntura Josephson, la supercorriente  $I$  está relacionada con la diferencia de fase entre cada uno de los electrodos a partir de la expresión  $I = I_0 \sin \varphi$ . En donde  $I_0$  es la corriente crítica máxima que la juntura puede mantener.
- Debido a la supercorriente: aparece un cambio de fase intrínseco calculando la integral de línea del momento  $\vec{P}$  a lo largo de la curva, por el movimiento de los pares de Cooper.
- Debido al flujo magnético externo: del Electromagnetismo Clásico y las leyes de Maxwell sabemos que un campo magnético que cambia con el tiempo induce

un campo eléctrico y éste a su vez modifica el momento de las partículas con carga al ejercerles una fuerza. El momento de los pares de Cooper está dado por  $\vec{P} = 2m_e\vec{v} + 2e\vec{A}$ , en donde la primer componente corresponde a la parte cinética y la segunda a la contribución del campo, siendo  $\vec{A}$  el potencial vector. Por lo tanto se debe tener en cuenta el efecto del campo externo sobre el momento al calcular la integral de línea de  $\vec{P}$  alrededor del anillo.

La juntura Josephson se puede pensar como un inductor no lineal. Sin embargo, en la práctica estas junturas presentan también una capacitancia por tratarse de dos electrodos superconductores separados por un aislante. Por lo tanto se puede considerar a la juntura en forma realista como un circuito LC con inductancia no lineal.

El Hamiltoniano de un *qubit* de flujo con una sola juntura Josephson está dado por

$$H = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + U(\hat{\Phi}), \quad (2.1)$$

con la correspondiente energía potencial

$$U(\hat{\Phi}) = \frac{\hat{\Phi}^2}{2L} - E_J \cos \left[ \frac{2\pi}{\Phi_0} (\hat{\Phi} - \Phi_{ext}) \right]. \quad (2.2)$$

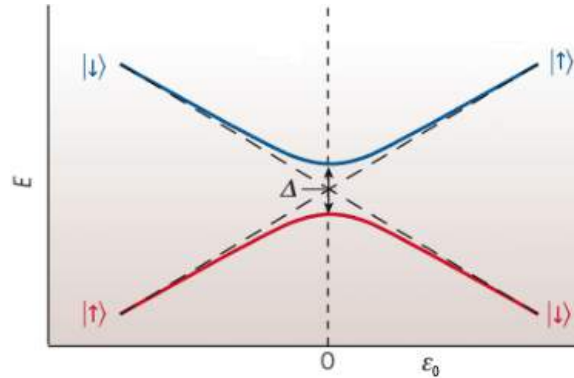
En estas expresiones  $\hat{\Phi}$  es el flujo en la juntura Josephson y  $\hat{Q}$  es la carga del capacitor, ambos son operadores canónicamente conjugados análogos a posición y momento, respectivamente.  $\Phi_{ext}$  es el flujo magnético aplicado externamente, C y L son la capacitancia e inductancia de este circuito,  $E_J$  es la energía Josephson y  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$  es el cuanto de flujo magnético.

La expresión (2.2) consta de un término cuadrático y un coseno, de modo que se forma un doble pozo de potencial. Este potencial presenta niveles de energía anarmónicos y en la práctica alcanza con considerar solamente el estado de menor energía de cada uno de los dos pozos, estos corresponden a corriente circulando en sentido horario y antihorario, o equivalentemente en estados con flujo apuntando hacia abajo  $|\downarrow\rangle$  y hacia arriba  $|\uparrow\rangle$ , respectivamente. Si  $\Phi_{ext} = \Phi_0/2$  el potencial es simétrico, mientras que si se aplica un campo magnético externo diferente se vuelve asimétrico, favoreciendo energéticamente el estado con corriente en uno de los dos sentidos. Utilizando como base del espacio de Hilbert los dos estados mencionados y aplicando un modelo de *Tight-Binding*, el *qubit* puede ser descrito por el siguiente Hamiltoniano efectivo

$$H_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Delta \\ \Delta & -\epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

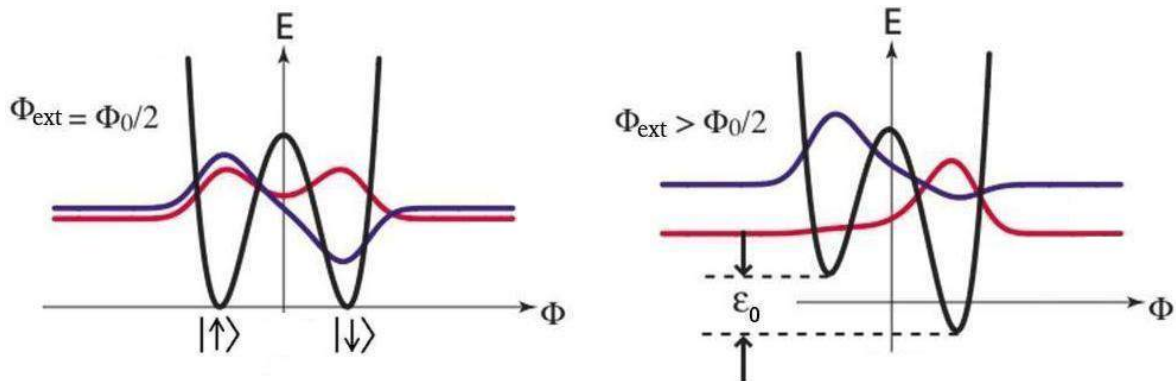
donde  $\epsilon_0$  define la diferencia de energía entre los estados  $|\downarrow\rangle$  y  $|\uparrow\rangle$  mientras que  $\Delta$  es el elemento de matriz de acoplamiento entre los mismos. A la cantidad  $\epsilon_0 = 2|I_p|\delta\Phi_{ext}$  se la denomina usualmente desfasaje (*detuning*), siendo  $I_p$  la corriente persistente en

el anillo superconductor y  $\delta\Phi_{ext} = \Phi_{ext} - \Phi_0/2$  el desfase en el flujo. La Figura 2.2 muestra las autoenergías  $E_{\pm} = \pm\hbar\omega_q/2$  con  $\hbar\omega_q = \sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta^2}$



**Figura 2.2:** Diagrama de energía para el *qubit* de flujo en función de  $\epsilon_0$

La Figura 2.3 muestra esquemáticamente el doble pozo de potencial en función de  $\Phi$  para el caso en que se aplica o no un desfase en el flujo externo respecto a medio cuanto de flujo.



**Figura 2.3:** Gráficos del potencial  $U(\Phi)$  y amplitudes de probabilidad de los autoestados del Hamiltoniano

Finalmente, si consideramos la situación en que se suma una componente armónica al campo externo aplicado, simplemente debemos reemplazar  $\epsilon_0$  por  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos \omega t$  en el Hamiltoniano efectivo del *qubit*, siendo  $A$  la amplitud y  $\omega$  la frecuencia del forzamiento.

## 2.4. Línea de transmisión de microondas

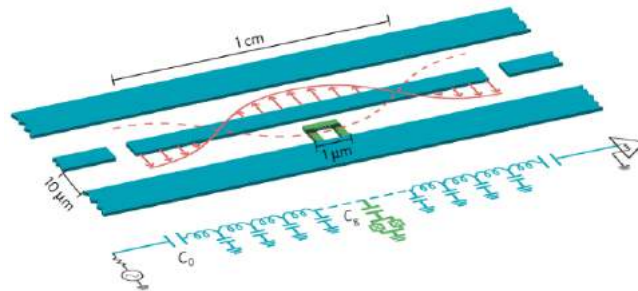
La idea central de la mayoría de las propuestas para arquitecturas de múltiples *qubits* se basa en acoplar los mismos a una línea de transmisión, o *quantum bus*, y seleccionar a partir de la frecuencia qué *qubits* se acoplan entre sí [11].

En forma general la línea de transmisión de microondas coplanar consiste en un arreglo compuesto por un cable unidimensional evaporado en un sustrato aislante y con

dos planos superconductores paralelos a él en la misma superficie. Podemos distinguir entre líneas de transmisión infinitas, semiinfinitas y finitas. Estas últimas se obtienen interrumpiendo en dos puntos el cable central, de manera que se obtiene un resonador que soporta un modo electromagnético cuantizado, comportándose como un armónico [14].

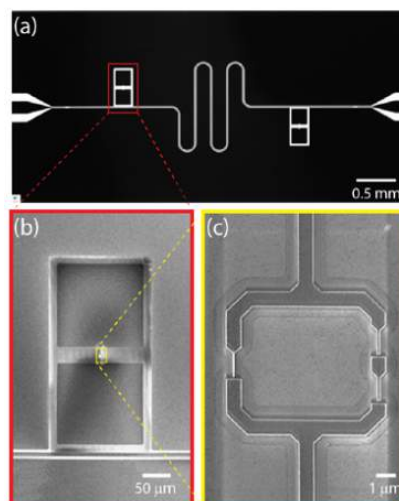
Existen diferentes maneras de acoplar *qubits* a líneas de transmisión, por ejemplo el acoplamiento puede ser capacitivo o inductivo y depende del tipo de *qubit* involucrado. Una de las características más destacables de estos átomos artificiales es que se pueden diseñar con parámetros que permiten obtener factores de acoplamiento de hasta cuatro órdenes de magnitud mayores que los conseguidos con átomos naturales [12].

Para ilustrar esquemáticamente la forma de las líneas de transmisión de microondas y un ejemplo de cómo se acoplan *qubits* superconductores a las mismas, la Figura 2.4 muestra un *qubit* de carga acoplado a un resonador fotónico.



**Figura 2.4:** *Qubit* de carga ubicado en el antinodo del campo electromagnético en una línea de transmisión de microondas que actúa como resonador fotónico. Extraído de [11]

De forma también ilustrativa para el lector, la Figura 2.5 muestra dos *qubits* de flujo acoplados capacitivamente en extremos opuestos de una línea de transmisión coplanar.



**Figura 2.5:** (a) Micrografía óptica de un chip compuesto por dos *qubits* de flujo y una guía de ondas  $\lambda/2$  (b) Imagen de microscopía electrónica del capacitor de uno de los *qubits*, el plato inferior acopla el *qubit* al resonador (c) Vista ampliada del anillo superconductor con sus tres juntas Josephson. Extraído de [15]

## 2.5. *Qubit* de flujo forzado y acoplado a la línea de transmisión

El sistema de interés en este trabajo consiste en un *qubit* de flujo forzado, acoplado capacitivamente a un único modo del campo electromagnético de una línea de transmisión, que actúa como resonador. A continuación mostramos el Hamiltoniano del sistema, que consta de tres partes: el término del *qubit*, el término del campo electromagnético confinado en el resonador y el término de interacción tipo Rabi. Este Hamiltoniano se expresa como

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}(\epsilon(t)\sigma_z + \Delta\sigma_x)}_{H_q} + \underbrace{\hbar\omega_r \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)}_{H_r} + \underbrace{\hbar g \sigma_y (a^\dagger + a)}_{H_{qr}}, \quad (2.4)$$

donde  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos \omega t$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  son las matrices de Pauli,  $a^\dagger$  y  $a$  son los operadores de creación y destrucción de un fotón, respectivamente, y  $\omega_r$  es la frecuencia del resonador. La intensidad del acoplamiento entre el *qubit* y el campo electromagnético es  $g$ . De ahora en adelante descartaremos el término  $\frac{1}{2}\hbar\omega_r$  por ser una contribución constante en la energía. El espacio de Hilbert compuesto es  $\mathcal{H}_{qubit} \otimes \mathcal{H}_{fotones}$ . A lo largo de todo este trabajo mantendremos en forma explícita la constante de Planck reducida  $\hbar$  en las fórmulas y desarrollos. Sin embargo en la exposición y descripción de gráficos y resultados, adoptaremos la adimensionalización  $\hbar = 1$ , de manera que  $\epsilon$ ,  $A$ ,  $\Delta$  y  $\omega$  estarán expresados en las mismas unidades adimensionalizadas de  $E_J$ , siguiendo la convención utilizada en [16].

En este punto quisiéramos destacar que el Hamiltoniano efectivo expuesto también se puede utilizar para describir otros tipos de *qubits* superconductores con otros acoplamientos a al resonador, por lo que los resultados de este estudio se pueden generalizar a otras situaciones de interés.

Quisiéramos también mencionar que existen estudios de la dinámica del *qubit* forzado armónicamente aplicando el Formalismo de Floquet [17]. Por otro lado, el análisis del *qubit* sin forzamiento y acoplado a la línea de transmisión ha sido resuelto en forma analítica en cierto régimen de parámetros a partir del Modelo de Jaynes-Cummings [9].





# Capítulo 3

## Hamiltonianos modelos *qubit*-resonador

La elaboración de este capítulo se basó principalmente en la referencia [10]. Para caracterizar la intensidad del acoplamiento *qubit*-resonador, el valor de la constante  $g$  que aparece en (2.4) se puede comparar con las frecuencias de transición del *qubit* y el resonador, y con los parámetros vinculados a los procesos de decoherencia del sistema:

- La tasa de pérdida del resonador  $\kappa$ : se debe a que el resonador no es ideal y está acoplado al campo electromagnético del entorno, generando así una pérdida de fotones.
- La tasa de relajación del *qubit*  $\gamma$ : se debe a que el *qubit* es sensible a diferentes tipos de ruido del entorno que tienden a restituirlo al estado fundamental.

Se suelen definir los siguientes regímenes:

1. Acoplamiento débil  $g < \max\{\gamma, \kappa\}$  y  $g < 0,1 \omega_{r/q}$
2. Acoplamiento fuerte  $g > \max\{\gamma, \kappa\}$  y  $g < 0,1 \omega_{r/q}$
3. Acoplamiento ultrafuerte (USC)  $g \gtrsim 0,1 \omega_{r/q}$
4. Acoplamiento profundamente fuerte (DSC)  $g \gtrsim \omega_{r/q}$

Bajo ciertas restricciones es posible aplicar el Modelo de Jaynes-Cummings en los regímenes 1 y 2, mientras que en 3 y 4 es necesario utilizar el Hamiltoniano de Rabi.

En la siguiente sección analizaremos el espectro de energías del Hamiltoniano de Rabi, que constituye el caso más general posible. Luego de este análisis nos concentraremos en la deducción y características del Modelo de Jaynes-Cummings, que es ampliamente utilizado en experimentos de Electrodinámica Cuántica de Circuitos. En particular, lo más usual experimentalmente es trabajar en el denominado **Régimen Dispersivo**,

que es un subrégimen del modelo del Jaynes-Cummings [9]. En ese caso se pueden realizar mediciones no demoleadoras del estado del *qubit* en forma indirecta actuando sobre el resonador. En esa situación simplemente se renormalizan los niveles de energía del *qubit* en función del estado del resonador y viceversa, la frecuencia del resonador cambia de acuerdo al estado del *qubit*. De esta manera, se envía una señal a través de la guía de ondas variando su frecuencia hasta que sintonice la nueva frecuencia del resonador, cuando esto ocurre se mide una señal transmitida a través de la guía de ondas y a partir de esa frecuencia se determina el estado del *qubit*. Adicionalmente, se puede manipular el *qubit* forzando el resonador con una señal enviada a través de la guía de ondas que tenga frecuencia cercana a la frecuencia natural del *qubit*[9].

En este trabajo el régimen dispersivo no es de interés ya que nosotros estudiamos la situación en que el *qubit* es forzado a través del flujo de campo magnético y analizamos cómo este sistema de dos niveles interactúa con el resonador generándose oscilaciones en donde el *qubit* intercambia excitaciones con el mismo, contrariamente a lo que ocurre en el régimen dispersivo [9]. El lector interesado en aprender más sobre las aplicaciones del régimen dispersivo puede referirse a [18] y a su material complementario.

### 3.1. Hamiltoniano de Rabi

En esta sección estudiaremos en detalle el espectro de energías del Hamiltoniano de Rabi sin forzamiento como función del parámetro de control  $\epsilon$ :

$$H = \frac{1}{2}(\epsilon\sigma_z + \Delta\sigma_x) + \hbar\omega_r a^\dagger a + \hbar g\sigma_y(a + a^\dagger). \quad (3.1)$$

Los cruces evitados en el espectro resultarán relevantes para interpretar los patrones de resonancias que se obtienen al estudiar el sistema físico mediante Interferometría LZS.

A pesar de que el Hamiltoniano de Rabi es el más simple que se puede plantear para estudiar la interacción de la radiación con la materia, fue recién hace unos años que se pudo encontrar una solución analítica, expresada en término de funciones trascendentes en el caso  $\Delta = 0$  [19]. La gran dificultad que presenta su resolución exacta se debe a que se trata de una matriz infinita que no puede ser separada en bloques de  $2 \times 2$  como en la aproximación de Jaynes-Cummings, la cual desarrollaremos en la siguiente sección. En forma ilustrativa mostramos a continuación un truncamiento del Hamiltoniano, restringiendo el espacio de Hilbert en una cantidad máxima de 3 fotones:

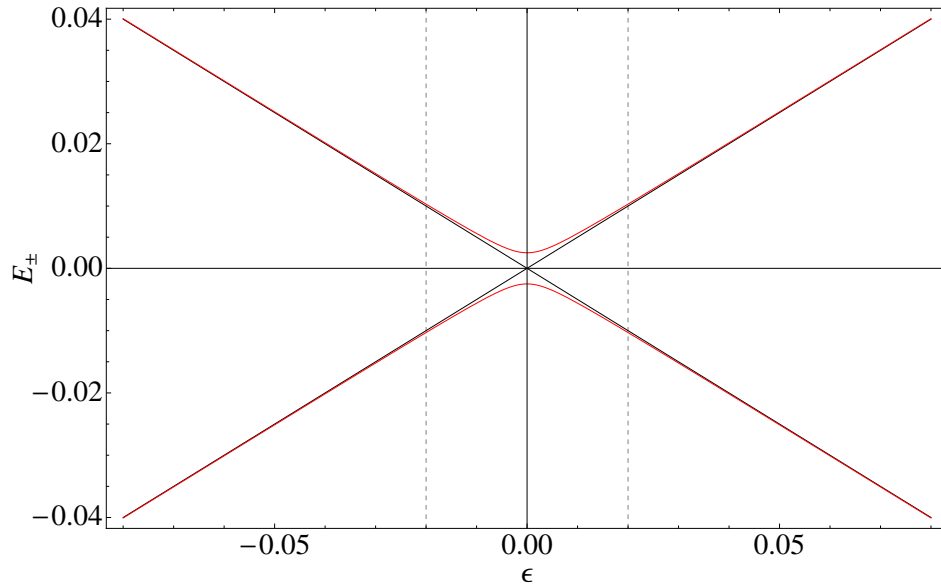
$$\begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{2} & \frac{\Delta}{2} & 0 & i\hbar g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta}{2} & \frac{\epsilon}{2} & -i\hbar g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\hbar g & -\frac{\epsilon}{2} + \hbar\omega_r & \frac{\Delta}{2} & 0 & i\sqrt{2}\hbar g & 0 & 0 \\ -i\hbar g & 0 & \frac{\Delta}{2} & \frac{\epsilon}{2} + \hbar\omega_r & -i\sqrt{2}\hbar g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\sqrt{2}\hbar g & -\frac{\epsilon}{2} + 2\hbar\omega_r & \frac{\Delta}{2} & 0 & i\sqrt{3}\hbar g \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2}\hbar g & 0 & \frac{\Delta}{2} & \frac{\epsilon}{2} + 2\hbar\omega_r & -i\sqrt{3}\hbar g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{3}\hbar g & -\frac{\epsilon}{2} + 3\hbar\omega_r & \frac{\Delta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{3}\hbar g & 0 & \frac{\Delta}{2} & \frac{\epsilon}{2} + 3\hbar\omega_r \end{bmatrix}$$

El mismo está escrito en la base producto  $\{|\downarrow 0\rangle, |\uparrow 0\rangle, |\downarrow 1\rangle, |\uparrow 1\rangle, |\downarrow 2\rangle, |\uparrow 2\rangle, |\downarrow 3\rangle, \dots\}$ . Podemos ver que los elementos de la diagonal corresponden simplemente a los dos niveles de energía del *qubit* más la energía de los fotones. Los elementos fuera de la diagonal se deben al término  $\frac{\Delta}{2}\sigma_x$  y a la interacción *qubit*-resonador.

En este trabajo estamos interesados en entender en forma cualitativa y cuantitativa el espectro de autoenergías de este Hamiltoniano para interpretar los resultados de la Interferometría de LZS. Por ello estudiaremos a continuación de manera progresiva cómo los términos no diagonales modifican el espectro respecto al esquema sin interacción *qubit*-resonador.

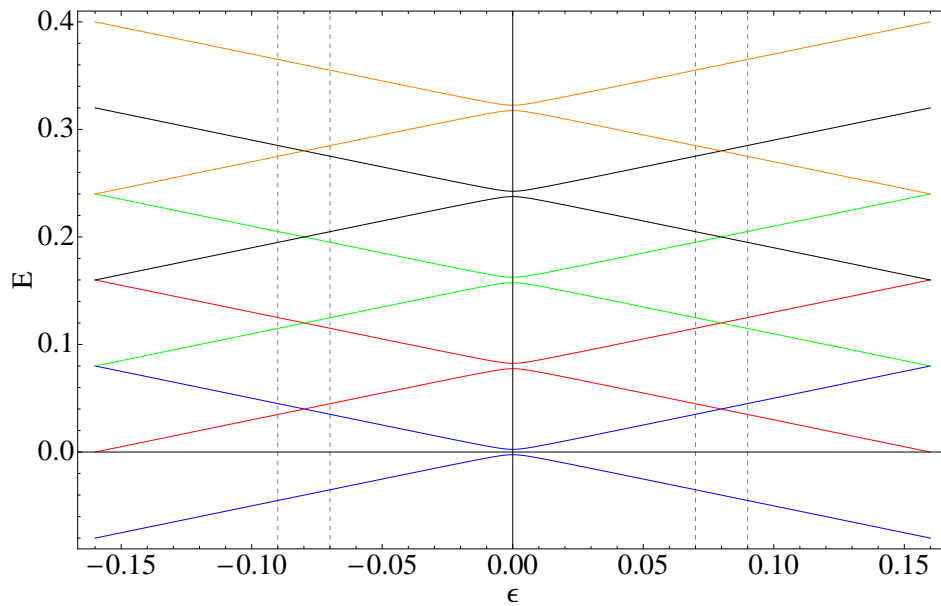
Como primer indicación queremos destacar que en el caso extremo de  $\epsilon$  suficientemente grande ( $\epsilon \gg \Delta, \hbar\omega_r$ ), todos los términos no diagonales se vuelven despreciables y las autoenergías del Hamiltoniano resultan simplemente las energías del *qubit*, que son líneas rectas ascendentes y descendentes de pendiente  $\pm 1/2$ , respectivamente, replicadas por la energía de los fotones del resonador. Por otro lado también es importante destacar que los elementos de matriz no diagonales debidos a la interacción *qubit*-resonador son proporcionales a  $g$  y a  $\sqrt{n+1}$ . Debido a esto, cuanto más intenso sea  $g$  y mayor sea el número de fotones en el resonador, más dominante será su efecto respecto a la contribución de los demás términos del Hamiltoniano.

La Figura 3.1 muestra los dos niveles de energía del *qubit*. Vemos que para  $\epsilon \gg \Delta$  las autoenergías  $E_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}{2}$  toman los valores  $\pm \epsilon/2$  con autoestados  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ .



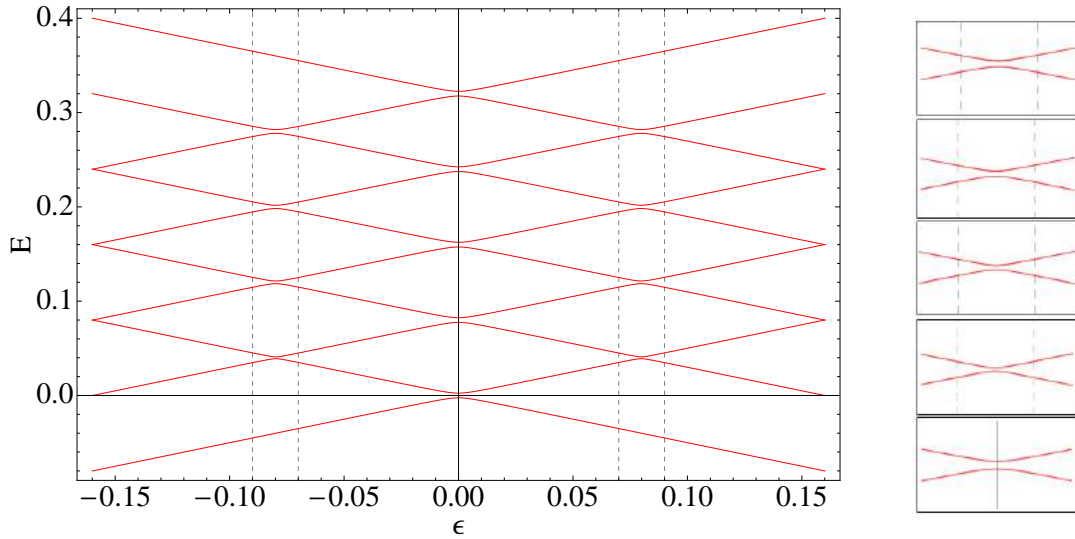
**Figura 3.1:** Autoenergías del *qubit*. Las líneas rojas (negras) corresponden a tomar  $\Delta = 0,005$  ( $\Delta = 0$ ). Las líneas punteadas verticales indican los valores  $\epsilon = \pm 4\Delta$

En la Figura 3.2 se muestra cómo el espectro de energías del *qubit* de la Figura 3.1 se replica hacia arriba con una separación en  $\hbar\omega_r$ , cuando incluimos la energía de los fotones del resonador pero no el término de interacción de Rabi.



**Figura 3.2:** Niveles de energía del *qubit* replicadas hacia arriba debido a la energía de los fotones. Los parámetros utilizados son  $\Delta = 0,005$  y  $\omega_r = 0,08$

La Figura 3.3 muestra el espectro al incluir el término de interacción de Rabi considerando  $g = 0,001$ . Aunque este término mezcla los estados de la base producto en forma no trivial, vemos que cualitativamente el efecto más notorio en las energías es la apertura de *gaps* que presentan una zona de influencia acotada por las líneas punteadas, fuera de ese rango las energías siguen viéndose como rectas ascendentes y descendentes.



**Figura 3.3:** Autoenergías del Hamiltoniano de Rabi truncado a un máximo de 4 fotones. Los parámetros son  $\Delta = 0,005$ ,  $g = 0,001$  y  $\omega_r = 0,08$

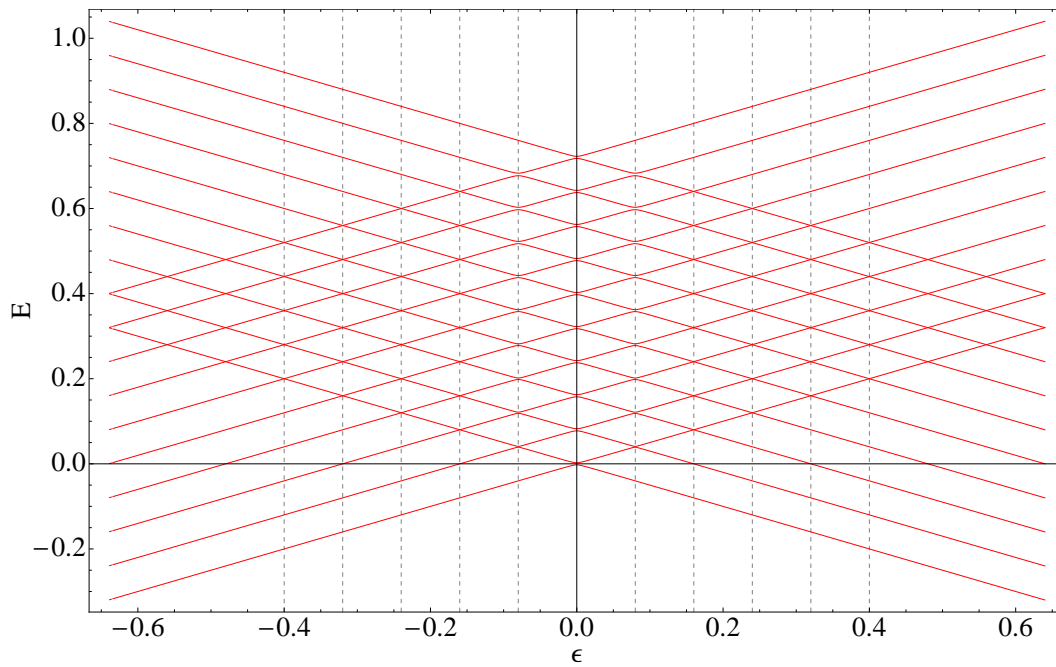
Los cruces evitados en  $\epsilon = \hbar\omega_r$  ( $\epsilon = -\hbar\omega_r$ ) son entre estados  $|\uparrow n\rangle$  y  $|\downarrow n+1\rangle$  ( $|\downarrow n\rangle$  y  $|\uparrow n+1\rangle$ ). Para dar una estimación del tamaño de los *gaps* que se abren realizamos el siguiente análisis: como primer paso diagonalizamos localmente el Hamiltoniano de  $2 \times 2$  restringido sólo a los estados correspondientes al cruce, de esa manera se obtiene una separación en energías de  $2\hbar g\sqrt{n+1}$ . El siguiente paso consiste en aplicar teoría de perturbaciones no degeneradas considerando el término de interacción de Rabi como perturbación dado que  $g \ll \omega_r$ . De esta manera se obtiene cómo los dos estados involucrados en el cruce se mezclan con todos los demás. El resultado de la perturbación no afecta en forma significativa el tamaño del *gap* y por lo tanto el mismo resulta aproximadamente  $2\hbar g\sqrt{n+1}$ .

En este punto resulta de fundamental importancia introducir una notación para referirnos a los diferentes niveles de energía del Hamiltoniano de Rabi. Por la explicación precedente y para el rango de parámetros considerados en este trabajo, podemos afirmar que lejos de los cruces evitados las energías son líneas rectas ascendentes y descendentes cuyo valor es esencialmente  $\pm\epsilon/2 + n\hbar\omega_r$  y los autoestados correspondientes tienen un peso mayoritario en  $|\uparrow n\rangle$  y  $|\downarrow n\rangle$ , respectivamente, sin embargo también tendrán contribuciones de otros estados de la base producto. Debido a esto, vamos a utilizar la notación  $|\widetilde{\uparrow n}\rangle$  y  $|\widetilde{\downarrow n}\rangle$  para referirnos a los autoestados del Hamiltoniano de Rabi.

La Figura 3.4 muestra el mismo espectro de la Figura 3.3 pero truncando el Ha-

Hamiltoniano en 9 fotones y considerando un rango más grande de  $\epsilon$ . En este gráfico podemos observar que las rectas ascendentes y descendentes se cortan cuando  $\epsilon = m\omega_r$  con  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Más precisamente:

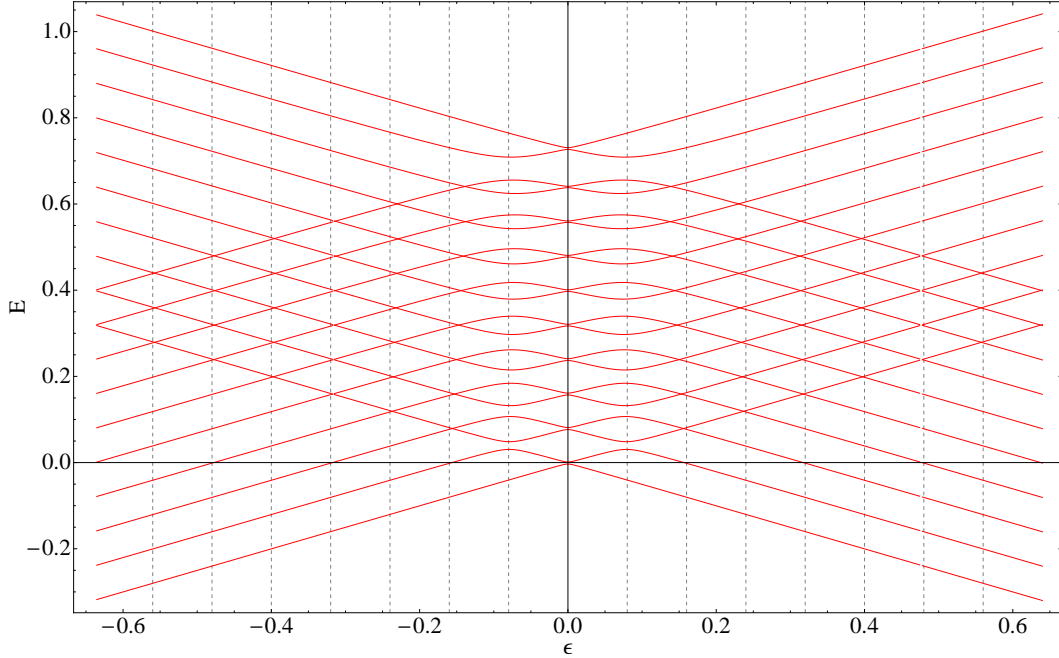
- Cuando  $m$  es positivo, en  $\epsilon = m\omega_r$  se cruzan las energías de los estados  $|\widetilde{\uparrow n}\rangle$  y  $|\widetilde{\downarrow n+m}\rangle$ .
- Cuando  $m$  es negativo, en  $\epsilon = m\omega_r$  se cruzan las energías de los estados  $|\widetilde{\downarrow n}\rangle$  y  $|\widetilde{\uparrow n-m}\rangle$ .



**Figura 3.4:** Energías del Hamiltoniano total truncado en un número máximo de 9 fotones. Los parámetros son  $\Delta = 0,005$ ,  $\omega_r = 0,08$  y  $g = 0,001$

De esta forma podemos etiquetar cada uno de estos cruces en forma unívoca con el par de números  $(m, n)$  teniendo en cuenta que la convención para reconocer los estados que se cruzan es diferente para valores de  $m$  negativos que positivos. En forma consistente, denominamos  $\Delta_n^m$  a los posibles gaps que se abran en esos cruces debido a la interacción. La Figura 3.5 muestra el espectro de energías con los mismos parámetros y truncamiento, pero tomando  $g = 0,009$ . Vemos que los *gaps*  $\Delta_n^1$  y  $\Delta_n^{-1}$  se incrementaron notablemente (debería ser por un factor 9 de acuerdo a nuestra estimación). También notamos que los cruces para  $m$  pequeños están corridos respecto a  $\epsilon = m\hbar\omega_r$  pero que para valores mayores se acercan más dado que el espectro se ve distorsionado mucho más por la interacción que en la situación con  $g = 0,001$ . Destacamos que si bien en este caso la región de influencia de los *gaps*  $\Delta_n^1$  y  $\Delta_n^{-1}$  es más extendida, es posible seguir numerando los cruces de energías con las etiquetas introducidas anteriormente. Lo que ocurre es que para un número suficientemente grande de fotones los *gaps*  $\Delta_n^{\pm 1}$  van a

ser mayores que  $\omega_r$  y por lo tanto en ese punto se van a perder los cruces ( $m=\pm 2, n$ ) debido a que el espectro se distorsiona demasiado. De esta manera, a medida que se incrementa  $n$  se van a ir perdiendo cruces con valores mayores de  $m$  debido a que los *gaps*  $\Delta_n^{\pm 1}$  van como  $2\hbar g\sqrt{n+1}$  y tienen un rango de influencia cada vez mayor.



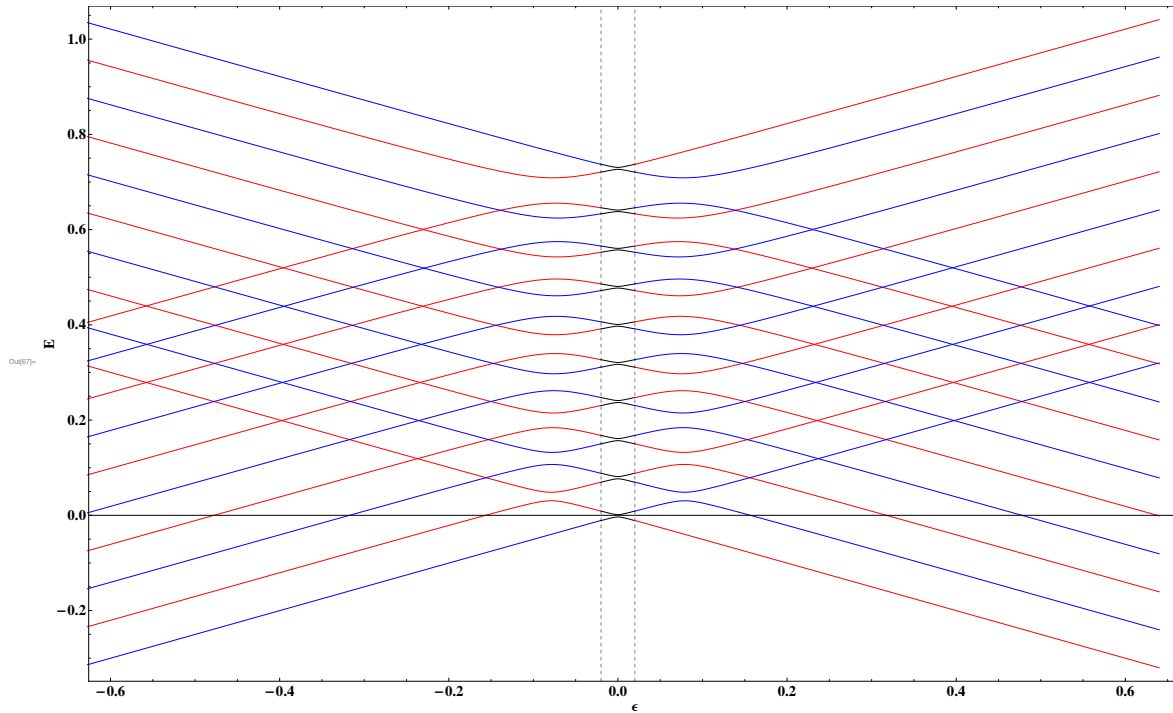
**Figura 3.5:** Energías del Hamiltoniano total truncado en un número máximo de 9 fotones. Los parámetros son  $\Delta = 0,005$ ,  $\omega_r = 0,08$  y  $g = 0,009$

En el espectro de la Figura 3.5 se produce una apertura de *gaps* en los cruces ( $m = \pm 3, n$ ), sin embargo eso no ocurre para los cruces ( $m = \pm 2, n$ ) dado que el Hamiltoniano de Rabi tiene simetría de paridad en el número excitaciones en esa región del espectro. El término  $\frac{\Delta}{2}\sigma_x$  del Hamiltoniano mezcla estados  $|\downarrow n\rangle$  y  $|\uparrow n\rangle$ , es decir que mantiene el número de fotones y crea o destruye una excitación del *qubit*. Por lo tanto no conserva el número de excitaciones, sin embargo para valores  $|\epsilon| \gg |\Delta|$  este término puede ser despreciado. En ese rango los únicos elementos no diagonales son los de la interacción  $\hbar g\sigma_y(a + a^\dagger)$  que tampoco conservan la cantidad de excitaciones pero sí su paridad, pues los cuatro términos resultantes que se obtienen al reescribir  $\sigma_y$  como  $i(\sigma_- - \sigma_+)$  mezclan estados que difieren en 0 ó 2 excitaciones. Más explícitamente:  $\sigma_- a^\dagger$  y  $\sigma_+ a$  conservan la cantidad de excitaciones, mientras que  $\sigma_- a$  destruye dos excitaciones y  $\sigma_+ a^\dagger$  crea dos. Debido a esto, el espacio de Hilbert se puede dividir en dos subespacios según la paridad del número de excitaciones

- PAR:  $\{|\downarrow 0\rangle, |\uparrow 1\rangle, |\downarrow 2\rangle, |\uparrow 3\rangle, |\downarrow 4\rangle, \dots\}$
- IMPAR:  $\{|\uparrow 0\rangle, |\downarrow 1\rangle, |\uparrow 2\rangle, |\downarrow 3\rangle, |\uparrow 4\rangle, \dots\}$

y diagonalizar H en cada uno de esos subespacios separadamente. Esta observación es sumamente importante ya que nos permite afirmar que en los cruces con  $m$  par y

distinto de 0 no se abren *gaps*, es decir que  $\Delta_n^m = 0$  para  $m = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ . La Figura 3.6 muestra las energías obtenidas para cada subespacio.



**Figura 3.6:** Energías del Hamiltoniano total truncado en un número máximo de 9 fotones y diagonalizado separadamente en el subespacio par (color rojo) e impar (color azul). En la región central entre las líneas punteadas no hay una paridad definida. Los parámetros son  $\Delta = 0,005$ ,  $\omega_r = 0,08$  y  $g = 0,009$ .

Seguidamente, queremos hacer notar que aunque para  $m$  impar se abren *gaps* en los cruces, los únicos dominantes son  $\Delta_n^{\pm 1}$  mientras que los demás resultan comparativamente muy pequeños. Esto se debe a que los dos estados que se cruzan en  $\Delta_n^{\pm 1}$  están conectados directamente por un elemento de matriz no nulo del Hamiltoniano, pues son estados que difieren en 1 fotón. Contrariamente, los demás cruces involucran estados que difieren en al menos 3 fotones y por lo tanto el grado en que se mezclan es mucho menor, aplicando teoría de perturbaciones degeneradas a segundo orden se obtiene que dichos *gaps* son del orden de  $(\hbar g)^2 / \hbar \omega_r \ll 1$ . Por esa razón, cuando estudiemos la Interferometría de LZS, restringiremos el intervalo de forzamiento  $(\epsilon_0 - A, \epsilon_0 + A)$  a la región central del espectro, ya que ahí es donde se encuentran los *gaps* predominantes y por lo tanto donde van a ocurrir los procesos de resonancia más importantes.

### 3.2. Modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings fue originalmente formulado para estudiar la interacción de átomos con fotones confinados dentro de una resonador. A lo largo del tiempo el mismo ha sido ampliamente aplicado dentro del campo de la óptica cuántica y pos-



teriormente para estudiar qubits superconductores acoplados a líneas de transmisión de microondas.

Como veremos en el desarrollo a continuación, este modelo describe la interacción *qubit*-resonador bajo la condición de **acoplamiento débil, cerca de la condición de resonancia**  $\epsilon_0 \approx \hbar\omega_r$  y **lejos del cruce evitado del *qubit***  $|\epsilon_0| \gg |\Delta|$ . En el cálculo mencionaremos en qué paso se utiliza cada una de estas suposiciones.

Primero notamos que al tomar  $|\epsilon_0| \gg |\Delta|$  podemos eliminar el término  $\frac{\Delta}{2}\sigma_x$  del Hamiltoniano, pues se está en la región en donde el gap del *qubit* no tiene efecto, en ese caso  $\hbar\omega_q = \epsilon_0$  directamente. Obtenemos así

$$\begin{aligned} H &= H_q + H_r + H_{qr} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega_r a^\dagger a + \hbar g\sigma_y(a + a^\dagger) \\ &= \underbrace{\frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma_z + \hbar\omega_r a^\dagger a}_{H_0} + \underbrace{\hbar g\sigma_y(a + a^\dagger)}_{H_1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ahora pasamos a la representación de interacción con la elección de operadores indicada arriba. En esta representación el Hamiltoniano se calcula como  $H^I = UH U^\dagger + i\dot{U}U^\dagger$ , donde utilizamos el operador evolución  $U(t) = e^{iH_0 t}$ . Hacemos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} H^I(t) &= U(t)H_0U^\dagger(t) + U(t)H_1U^\dagger(t) + i\dot{U}(t)U^\dagger(t) \\ &= \cancel{H_0} + U(t)H_1(t)U^\dagger(t) + i\dot{U}(t)U^\dagger(t) \\ &= U(t)[\hbar g\sigma_y(a + a^\dagger)]U^\dagger(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} &= U(t)[\hbar g i(\sigma_- - \sigma_+)(a + a^\dagger)]U^\dagger(t) \\ &= i\hbar g U(t)[\sigma_- a^\dagger - \sigma_+ a + \sigma_- a - \sigma_+ a^\dagger]U^\dagger(t) \\ &= i\hbar g(\sigma_- a^\dagger e^{i(-\omega_q + \omega_r)t} - \sigma_+ a e^{i(\omega_q - \omega_r)t} + \sigma_- a e^{-i(\omega_q + \omega_r)t} - \sigma_+ a^\dagger e^{i(\omega_q + \omega_r)t}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

habiendo reescrito  $\sigma_y$  en término de los operadores de subida y bajada del *qubit*  $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , respectivamente. Los mismos satisfacen que  $\sigma_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$  y  $\sigma_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ . Este Hamiltoniano contiene términos que oscilan como  $(\omega_q - \omega_r)$  y otros que lo hacen como  $(\omega_q + \omega_r)$ . De los cuatro términos presentes, los dos primeros llevan el nombre de rotantes y conservan el número total de excitaciones del sistema *qubit*-resonador, pues el primero desexcita el *qubit* y crea un fotón mientras que el

segundo excita el *qubit* y aniquila un fotón; por otro lado los dos últimos términos se denominan antirrotantes y no conservan el número de excitaciones. Cuando se cumple la condición de cuasiresonancia y acoplamiento débil se tiene que  $\{|\omega_r - \omega_q|, g\} \ll |\omega_r + \omega_q|$  y por lo tanto los términos antirrotantes son rápidamente oscilantes, por lo que su contribución a la dinámica del *qubit* puede ser despreciada, obteniendo así un Hamiltoniano aproximado, que escrito nuevamente en la representación de Schrödinger queda como:

$$H^{JC} = \frac{1}{2}\hbar\omega_q\sigma_z + \hbar\omega_r a^\dagger a + i\hbar g(\sigma_- a^\dagger - \sigma_+ a). \quad (3.5)$$

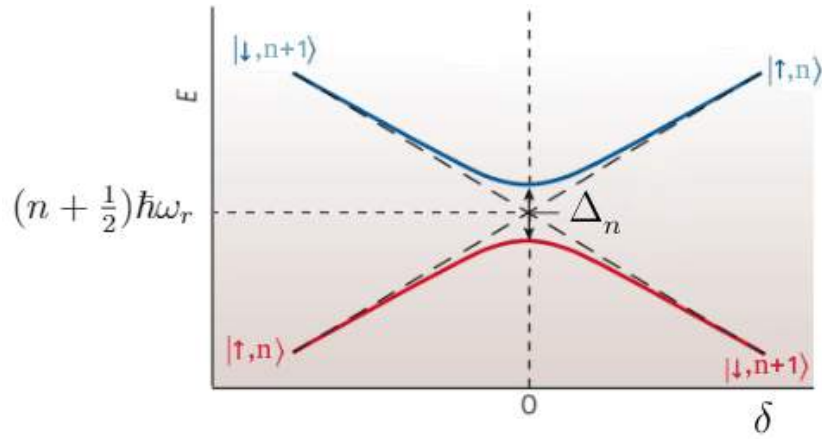
Ésta es la Aproximación de Onda Rotante (RWA) y es exacta en la situación de resonancia  $\omega_r = \omega_q$ . La gran ventaja de realizar esta aproximación es que  $H^{JC}$  conserva el número de excitaciones del sistema, es decir, conmuta con el operador número:  $N_e = a^\dagger a + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a^\dagger a + (1 - \sigma_z)/2$ . Esto implica que la interacción sólo puede acoplar dos estados  $|\uparrow, n\rangle$  y  $|\downarrow, n+1\rangle$ . De esta manera  $H^{JC}$  es diagonal por bloques, con bloques de  $2 \times 2$ . Por lo tanto alcanza con diagonalizar ese Hamiltoniano en cada subespacio  $\{|\uparrow, n\rangle, |\downarrow, n+1\rangle\}$ . Los bloques de  $2 \times 2$  que se obtienen son:

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} n\hbar\omega_r + \frac{1}{2}\hbar\omega_q & -i\hbar g\sqrt{n+1} \\ i\hbar g\sqrt{n+1} & (n+1)\hbar\omega_r - \frac{1}{2}\hbar\omega_q \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

O equivalentemente:

$$H^{(n)} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hbar\delta & -i\Delta_n \\ i\Delta_n & -\hbar\delta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

donde  $\delta = \omega_q - \omega_r$  es el desfase entre la frecuencia del *qubit* y la del resonador; y  $\Delta_n = 2\hbar g\sqrt{n+1}$  actúa como un *gap* efectivo generado por los fotones. Este Hamiltoniano tiene autoenergías  $E_\pm^{(n)} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_r \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\hbar\delta)^2 + \Delta_n^2}$ , las cuales mostramos esquemáticamente en la Figura 3.7.



**Figura 3.7:** Autoenergías de  $H^{(n)}$  en función de  $\delta$

Por último, podemos añadir nuevamente el término de forzamiento, que quitamos inicialmente por simplicidad:

$$H^{(n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\hbar\delta + A \cos \omega t) & -i\Delta_n \\ i\Delta_n & -(\hbar\delta + A \cos \omega t) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Como consecuencia, en el régimen donde es válida la aproximación de onda rotante el sistema se comporta como una colección de *qubits* efectivos forzados que presentan un corrimiento global de energía y un *gap* dependientes del número de fotones. Por lo tanto, esta aproximación es atractiva por su gran simplicidad de interpretación. Parte del presente trabajo se basa en el estudio de las transiciones de LZS en el rango de parámetros donde es válido el Modelo de Jaynes-Cummings.

Por otro lado, recientemente se han podido realizar experimentos que alcanzan el régimen de acoplamiento ultrafuerte (USC), en el que la intensidad de acoplamiento alcanza valores comparables a la frecuencia del resonador y donde no es válido el modelo de Jaynes-Cummings [10, 20-22]. Esto ha motivado desarrollos teóricos en esa dirección por la gran variedad de fenómenos físicos novedosos que presenta ese régimen y por sus potenciales aplicaciones en Computación Cuántica. Como se verá más adelante, considerar el Hamiltoniano de Rabi nos permite obtener resultados en ese régimen.



# Capítulo 4

## Interferometría de Landau-Zener-Stückelberg y Formalismo de Floquet

Una transición a velocidad constante entre los niveles de energía en un cruce evitado se conoce como transición de Landau-Zener. Cuando se considera un sistema de dos niveles que está sujeto a un forzamiento periódico con amplitud suficientemente grande, se produce una secuencia de transiciones. La fase acumulada entre transiciones (comúnmente conocida como fase de Stückelberg) puede resultar en una interferencia constructiva o destructiva. En consecuencia, los observables físicos del sistema muestran una dependencia periódica de los parámetros del forzamiento (Amplitud y frecuencia) y del sistema estático (tamaño del *gap*). Este fenómeno a menudo se conoce como Interferometría de Landau-Zener-Stückelberg (LZS) y ocurre en una gran variedad de sistemas físicos. En particular, experimentos recientes con *qubits* superconductores han demostrado el potencial para utilizar este tipo de Interferometría como una herramienta efectiva para realizar una manipulación rápida y confiable del sistema cuántico [8]. Adicionalmente se ha mostrado en diversos trabajos que cuando se aplica Interferometría de LZS a sistemas de muchos niveles con cruces evitados, aparecen fenómenos interesantes tales como patrones de resonancias que forman diamantes, inversión de población en el régimen asintótico cuando se incluye disipación, resonancias simétricas, antisimétricas y de banda lateral, etc.[16, 23-25]

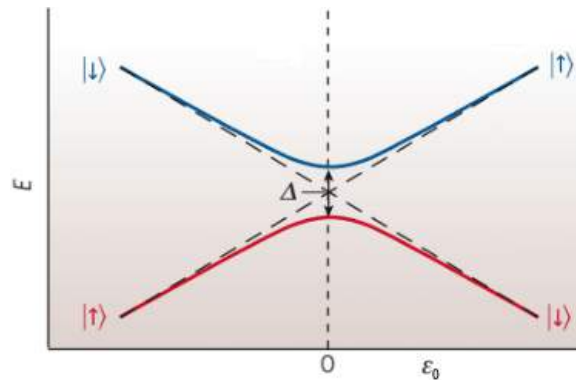
En la siguiente sección desarrollaremos estos conceptos en mayor profundidad, llegando a descripciones cuantitativas y cualitativas para el caso sin disipación. Luego introduciremos el Formalismo de Floquet, que permite la resolución exacta de la dinámica de sistemas con forzamiento periódico arbitrario.

## 4.1. Interferometría LZS

Consideremos un sistema cuántico que presenta un cruce evitado descrito localmente con un Hamiltoniano de  $2 \times 2$  representado en la **base computacional** o **base diabática**  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ :

$$H_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde  $\epsilon$  es la diferencia de energía de los estados  $|\downarrow\rangle$  y  $|\uparrow\rangle$  mientras que  $\Delta$  es la intensidad de acoplamiento entre los mismos. Generalmente  $\Delta$  está fijado por las propiedades del sistema mientras que  $\epsilon$  es un parámetro de control ajustable. La Figura 4.1 muestra las autoenergías  $E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$



**Figura 4.1:** Diagrama de energía del sistema en función de  $\epsilon$

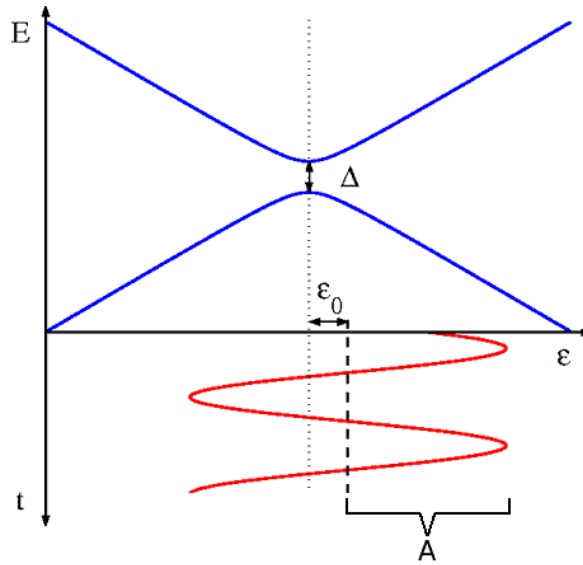
En el cruce evitado donde  $\epsilon = 0$  los dos niveles están separados por  $\Delta$  y los autoestados corresponden a la combinación simétrica y antisimétrica de los estados de la base computacional:  $(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$  y  $(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ . Para  $|\epsilon| \gg \Delta$  las autoenergías se vuelven esencialmente  $E_{\pm} = \pm\epsilon/2$  con autoestados  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ .

Cuando se aplica un forzamiento armónico en el tiempo, el Hamiltoniano del sistema se vuelve

$$H(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon(t) & \Delta \\ \Delta & -\epsilon(t) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

en donde  $\epsilon(t) = \epsilon_0 + A \cos \omega t$ ,  $A$  es la amplitud y  $\omega$  es la frecuencia del forzamiento, que en este caso es llamado diagonal o longitudinal. La Figura 4.2 muestra esquemáticamente esta situación.

Para este problema existen dos regímenes diferenciados por la velocidad a la cual se atraviesa la región del cruce evitado; esta velocidad es del orden de  $A\omega$ . Se distingue entre el **Régimen de Forzamiento Lento** ( $A\omega < \Delta^2$ ) y **Forzamiento Rápido** ( $A\omega \gg \Delta^2$ ). Existen diferentes abordamientos para resolver el problema que son apropiados dependiendo el régimen de parámetros en el que se trabaje. A continuación



**Figura 4.2:** Diagrama de energías del sistema y en presencia de un forzamiento armónico

analizaremos la probabilidad de transición entre los dos niveles del cruce evitado para cada uno de los regímenes mencionados. Para el caso de forzamiento rápido aplicaremos una **Aproximación de Onda Rotante (RWA)** mientras que para forzamiento lento utilizamos el **Modelo de Impulso Adiabático** [8].

### 4.1.1. Probabilidad de transición y resonancias

#### Régimen de Forzamiento Rápido

Consideremos el siguiente Hamiltoniano, correspondiente a un sistema de dos niveles con forzamiento armónico de amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ :

$$H(t) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 + A \cos \omega t)\sigma_z + \frac{\Delta}{2}\sigma_y. \quad (4.3)$$

A continuación lo resolveremos en forma analítica aplicando una aproximación de onda rotante (RWA).

En forma general, una rotación del sistema de coordenadas dada por un ángulo  $\phi(t)$  alrededor de un eje con dirección  $\hat{n}$  se realiza a partir de la transformación unitaria  $U_\phi(t) = e^{-i\frac{\phi(t)}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{n}}$ , de manera que la función de onda y el Hamiltoniano transformado resultan

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi'(t)\rangle = U_\phi |\psi(t)\rangle \quad (4.4)$$

$$H(t) \rightarrow H'(t) = U_\phi H U_\phi^{-1} + i\dot{U}_\phi U_\phi^{-1} \quad (4.5)$$

Como primer paso aplicaremos la rotación  $U_{\phi_N} = e^{-i\frac{\phi_N}{2}\sigma_z}$  con  $\phi_N = -[N\omega t + \frac{A}{\hbar\omega} \sin \omega t]$ , de manera que el nuevo Hamiltoniano queda como

$$H' = \frac{1}{2}(\epsilon_0 + A \cos \omega t + \dot{\phi}_N)\sigma_z + \frac{\Delta}{2}(ie^{i\phi_N}\sigma_- + h.c.)\sigma_y. \quad (4.6)$$

Utilizando la identidad  $e^{ix \sin a} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)e^{ika}$  hacemos la aproximación

$$e^{i\phi_N} = e^{-i[N\omega t + \frac{A}{\hbar\omega} \sin \omega t]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right) e^{-i(k+N)\omega t} \approx J_{-N}\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right) \quad (4.7)$$

que es válida para  $|\epsilon_0 - N\hbar\omega| \ll \Delta$ , es decir cerca de la condición de resonancia  $\epsilon_0 = N\hbar\omega$ . En este paso despreciamos los términos rápidamente oscilantes  $k \neq -N$  (RWA). Introduciendo la aproximación (4.7) en (4.6) obtenemos

$$H' \approx H'' = \frac{1}{2}(\epsilon_0 - N\hbar\omega)\sigma_z + \frac{\Delta}{2}J_{-N}\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right)\sigma_y. \quad (4.8)$$

Finalmente diagonalizamos  $H''$  al aplicar la rotación  $U_\theta = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_x}$  con  $\tan \theta = \frac{\Delta J_{-N}\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right)}{(\epsilon_0 - N\hbar\omega)}$  de modo que se llega a

$$H''' = U_\theta H'' U_\theta^{-1} = \frac{1}{2}\hbar\Omega_N\sigma_z, \quad (4.9)$$

en donde  $\hbar\Omega_N = \sqrt{[\epsilon_0 - N\hbar\omega]^2 + [\Delta J_{-N}\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right)]^2}$  corresponde a la frecuencia de Rabi generalizada. Notar que el Hamiltoniano  $H'''$  resulta independiente del tiempo y posee autoestados  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  que evolucionan con autoenergías  $\epsilon_\pm = \pm\frac{1}{2}\hbar\Omega_N$ . Con este resultado es posible calcular la probabilidad de transición del estado inicial  $|\downarrow\rangle$  al estado  $|\uparrow\rangle$  transcurrido un tiempo  $t$

$$P_{|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle}^N(t) = \frac{1}{2} \frac{[\Delta J_{-N}\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right)]^2}{(\hbar\Omega_N)^2} (1 - \cos \Omega_N t), \quad (4.10)$$

y promediando en un período del forzamiento

$$\overline{P}_{|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle}^N = \frac{1}{2} \frac{[\Delta J_{-N}\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right)]^2}{(\hbar\Omega_N)^2}. \quad (4.11)$$

Por un lado, de (4.10) predecimos que va a haber oscilaciones en las poblaciones con frecuencia  $\Omega_N$ . Por otro lado, en la condición exacta de resonancia  $\epsilon_0 = N\omega$ , la frecuencia de Rabi resulta ser  $\hbar\Omega_N = \Delta J_{-N}\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right)$ . En esta situación (4.10) y (4.11) quedan como:

$$P_{|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle}^{Nres}(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega_N t) \quad (4.12)$$



$$\overline{P}_{|\downarrow\rangle\rightarrow|\uparrow\rangle}^{Nres} = \frac{1}{2}. \quad (4.13)$$

Las expresiones (4.10) y (4.11) son válidas en un entorno alrededor de cada condición de resonancia  $\epsilon_0 \approx N\omega$  pero como estas probabilidades decaen al alejarse de dicha situación podemos expresar en forma general las probabilidades de transición sumando sobre todas las resonancias (o valores de N), de manera que

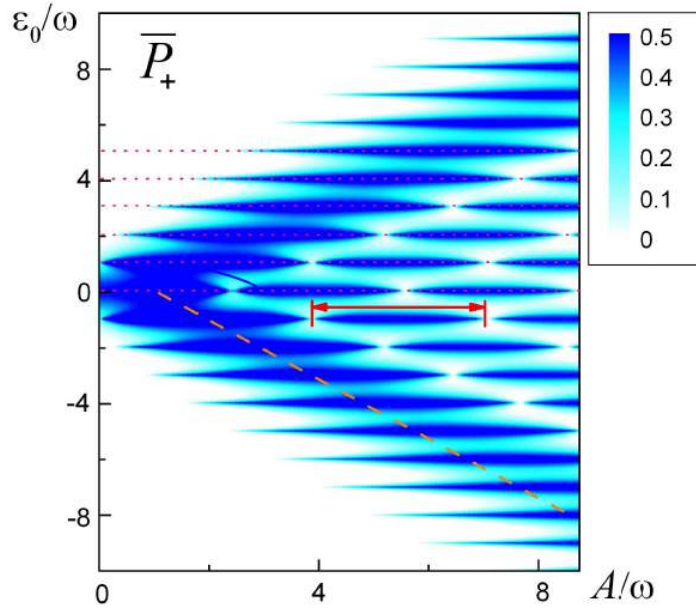
$$P_{|\downarrow\rangle\rightarrow|\uparrow\rangle} = \sum_N P_{|\downarrow\rangle\rightarrow|\uparrow\rangle}^N. \quad (4.14)$$

Como mostramos unas líneas más arriba, la probabilidad de transición promediada en un período del forzamiento, como función de los parámetros del problema, está dada por la expresión:

$$\overline{P}_{|\downarrow\rangle\rightarrow|\uparrow\rangle}(\Delta, A, \omega) = \sum_N \frac{1}{2} \frac{[\Delta J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega})]^2}{[\epsilon_0 - N\hbar\omega]^2 + [\Delta J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega})]^2}, \quad (4.15)$$

es decir, se trata de una colección de curvas lorentzianas centradas alrededor de las condiciones de resonancia  $\epsilon_0 = N\omega$  y cuyo ancho está modulado por  $\Delta J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega})$ . Esta modulación dependiente de las funciones de Bessel es la que genera una estructura característica de lóbulos. En este punto vale la pena resaltar el fenómeno de "Destrucción coherente del *tunneling*" [24]. Esto se produce en los puntos donde la función de Bessel se anula, haciendo que la probabilidad de transición valga 0, a pesar de encontrarse en condición de resonancia, donde vimos que dicha probabilidad es de manera general igual 1/2. También queremos destacar que cuando el valor de  $|\epsilon_0|$  excede al de  $A$  no hay transición debido a que en ese caso el sistema es siempre forzado lejos del cruce evitado. Cuando se tienen en cuenta la disipación producida por el contacto con el entorno, se producen efectos de relajación y decoherencia que pueden ser modelados fenomenológicamente mediante las ecuaciones de Bloch y generan un ensanchamiento de las resonancias [8].

La Figura 4.3 muestra la estructura de resonancias observada en este régimen de forzamiento teniendo en cuenta la influencia del entorno.



**Figura 4.3:** Mapa ilustrativo de la probabilidad de transición al estado  $|\uparrow\rangle$  promediada en un período del forzamiento, en función de  $\epsilon_0$  y  $A$  (normalizados por  $\omega$ ) tomando  $\Delta/\omega = 0,88$  y considerando efectos de disipación. Esto corresponde a la situación de forzamiento rápido en donde las resonancias describen lóbulos modulados por diferentes funciones de Bessel alrededor de  $\epsilon_0 = N\omega$ . Extraído de [8]

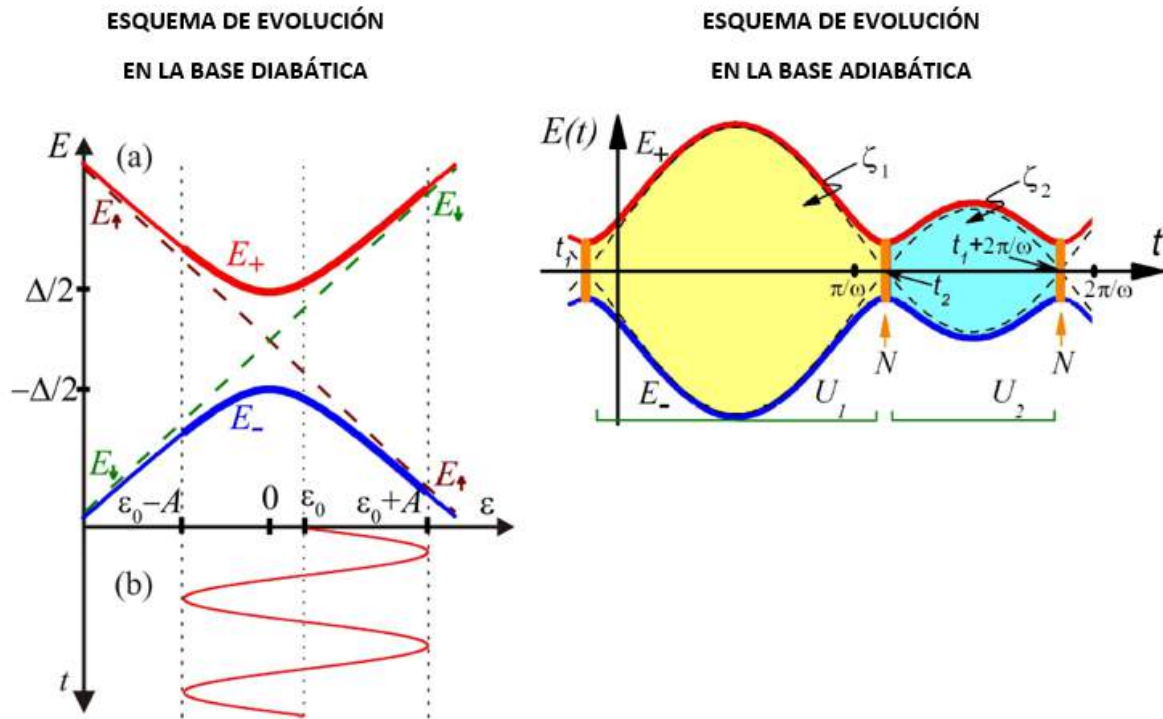
### Régimen de Forzamiento Lento

Mientras que en el planteamiento anterior trabajamos estudiando la evolución del sistema en la base diabática  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ , en el desarrollo que sigue haremos una descripción utilizando la denominada **base adiabática**  $\{|\varphi_+(t)\rangle, |\varphi_-(t)\rangle\}$ , que consiste en los autoestados instantáneos del Hamiltoniano dependiente del tiempo  $H(t) |\varphi_{\pm}(t)\rangle = E_{\pm}(t) |\varphi_{\pm}(t)\rangle$ . Este problema tiene como solución los siguientes autoestados y autoenergías instantáneos:

$$\begin{aligned}
 |\varphi_{\pm}(t)\rangle &= \beta_{\mp}(t) |\uparrow\rangle \mp \beta_{\pm}(t) |\downarrow\rangle \\
 E_{\pm} &= \pm \frac{1}{2} \Omega(t),
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

en donde  $\Omega(t) = \sqrt{\Delta^2 + \epsilon(t)^2}$  y  $\beta_{\pm}(t) = \sqrt{\frac{\Omega(t) \pm \epsilon(t)}{2\Omega(t)}}$ . En la Figura 4.4 se esquematiza la dinámica del problema en términos de ambas bases.

Cuando se utiliza la base diabática, vemos las autoenergías del Hamiltoniano independiente del tiempo como función del parámetro de control  $\epsilon$ . También está ilustrado cómo el forzamiento armónico realiza un barrido en  $\epsilon$  en el rango  $(\epsilon_0 - A, \epsilon_0 + A)$ .



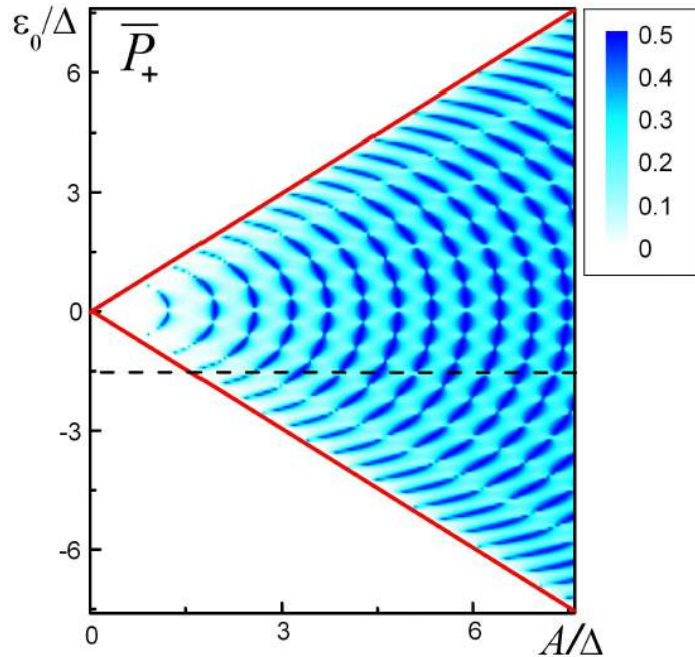
**Figura 4.4:** Dinámica del sistema descrita en la base diabática (izquierda) y adiabática (derecha). Extraído de [8]. Ver texto para más detalles.

Para el análisis en la base adiabática el gráfico muestra las energías instantáneas como función del tiempo a lo largo de un período del forzamiento. Los niveles energéticos  $E_{\pm}(t)$  alcanzan un separación mínima igual a  $\Delta$  cada vez que el sistema atraviesa el cruce evitado en  $\epsilon = 0$ , esto se produce periódicamente para  $t = t_{1,2} + 2\pi n/\omega$ , donde  $n$  es cualquier número entero,  $\omega t_1 = \arcsin(-\epsilon_0/A)$  y  $\omega t_2 = \pi - \omega t_1$ .

En la Figura 4.4 se puede ver que las autoenergías instantáneas cambian rápidamente cuando el sistema atraviesa el cruce, mientras que en los tramos intermedios lo hacen en forma más suave. Separando la evolución de esta forma se tiene por un lado que en los tramos adiabáticos el sistema únicamente acumula una fase y por otro lado que en los puntos de separación mínima ocurre el equivalente a un proceso de *scattering* y las poblaciones de los dos niveles se mezclan. La evolución adiabática se describe a partir de las matrices  $U_{1,2} = \exp(-i\zeta_{1,2}\sigma_z)$ , en donde la fase adquirida es igual al área entre las dos curvas. La evolución en la cercanía de los puntos del cruce evitado se puede tratar como un problema de Landau-Zener, obteniendo así la probabilidad final de que el sistema pase al nivel superior si inicialmente se hallaba en el inferior:  $P_{LZ}$ . Intuitivamente uno se puede imaginar que mientras más rápidamente se atravesase el cruce, mayor será la probabilidad de que haya una transición entre los dos estados.

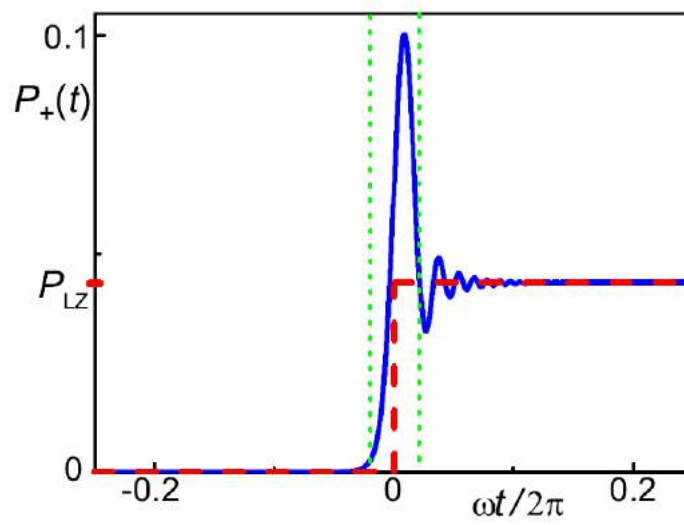
Con estos dos tratamientos se puede obtener una expresión que describe la probabilidad de que el sistema pase al estado final  $|\uparrow\rangle$  luego de haber atravesado múltiples veces el cruce evitado. Se puede ver que en la condición de resonancia  $\zeta_1 + \zeta_2 \approx k\pi$  el

sistema muestra oscilaciones entre los dos estados, donde  $k$  es cualquier entero, pero no hay una expresión analítica cerrada para  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  [8]. La Figura 4.5 muestra un mapa de la probabilidad de transición promediada en un período en función de los parámetros  $\epsilon_0$  y  $A$ . Allí vemos que la condición de resonancia en donde dicha probabilidad alcanza el valor máximo  $1/2$  describe arcos centrados alrededor del punto  $A = \epsilon_0 = 0$ . También destacamos que dicha probabilidad se vuelve despreciable en la región  $|\epsilon_0| > A$  ya que en esa situación el sistema es forzado lejos del cruce evitado.



**Figura 4.5:** Mapa ilustrativo de la probabilidad de transición al estado  $|\uparrow\rangle$  promediada en un período en función de  $\epsilon_0$  y  $A$  (normalizados por el *gap*  $\Delta$ ) tomando  $\Delta/\omega = 3,125$ . Esto corresponde a la situación de forzamiento lento en donde las resonancias describen arcos de ancho modulado

Quisiéramos destacar que para cualquier velocidad de forzamiento, estas aproximaciones analíticas describen en forma precisa la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado final  $|\uparrow\rangle$  cuando ya se alejó de la región del cruce evitado, pero que no describe la dinámica transitoria en el entorno del cruce. Esto está ilustrado en la Figura 4.6, en donde se comparan los resultados analíticos para una transición LZ con los resultados numéricos exactos. Vemos que en el transitorio aparecen oscilaciones de alta frecuencia que no están predichas por el resultado analítico. Se hace mención de este fenómeno ya que cuando mostremos más adelante los resultados obtenidos, observaremos las mismas oscilaciones en los gráficos de evolución temporal.



**Figura 4.6:** Transición de LZ entre los dos niveles para un pasaje a través del cruce evitado. La línea azul representa los resultados numéricos exactos para la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado superior, mientras que la línea punteada roja corresponde a la solución analítica. El intervalo temporal del cruce está delimitado por las líneas punteadas verdes.

## 4.2. Formalismo de Floquet

De la misma manera que el Teorema de Bloch predice la forma de las soluciones de un Hamiltoniano con simetría de traslación espacial discreta, el formalismo de Floquet permite resolver sistemas cuyo Hamiltoniano es periódico en el tiempo  $H(t) = H(t+T)$ , siendo  $T$  el período [26].

Dada la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (4.17)$$

La solución general se puede escribir como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_a c_a |\psi_a(t)\rangle, \quad (4.18)$$

donde  $\{|\psi_a(t)\rangle\}$  es un conjunto completo de autofunciones de  $H(t)$ . De acuerdo al Teorema de Floquet, es posible hallar un conjunto de autofunciones de la forma

$$|\psi_a(t)\rangle = e^{-i\epsilon_a t/\hbar} |a(t)\rangle. \quad (4.19)$$

donde  $|a(t)\rangle$  se denomina un modo de Floquet y satisface  $|a(t)\rangle = |a(t+T)\rangle$ , siendo  $\epsilon_a$  la cuasienergía correspondiente, obtenidos de diagonalizar el Hamiltoniano de Floquet  $\mathcal{H} = H(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ , es decir:

$$\mathcal{H} |a(t)\rangle = \epsilon_a |a(t)\rangle. \quad (4.20)$$

Haciendo uso de las expresiones (4.18) y (4.19), el operador evolución está dado por  $U(t, t_0) = \sum_a |\psi_a(t)\rangle \langle \psi_a(t_0)| = \sum_a e^{-i\epsilon_a(t-t_0)/\hbar} |a(t)\rangle \langle a(t_0)|$ , de manera que  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$ .

Expandiendo  $H(t)$  y  $|a(t)\rangle$  en sus componentes de Fourier se transforma un problema de dimensión finita periódico en el tiempo en un problema de autovalores de dimensión infinita independiente del tiempo. Las expansiones son las siguientes

$$H(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H^{[m]} e^{-i\omega m t}, \quad (4.21)$$

$$|a(t)\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m\rangle e^{-i\omega m t}, \quad (4.22)$$

en donde  $H^{[m]}$  y  $|a_m\rangle$  se expresan en una base de Hilbert del sistema independiente del tiempo (de dimensión  $d$ ). Reemplazando estos desarrollos en (4.20) obtenemos la siguiente ecuación matricial

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{(H^{[M-m]} - \hbar\omega M \delta_{mM} \mathbb{I})}_{\mathcal{H}_{Mm}} |a_m\rangle = \epsilon_a |a_M\rangle. \quad (4.23)$$

siendo  $\mathcal{H}_{Mm}$  los bloques de  $d \times d$  que componen la matriz de dimensión infinita. Como resultado de la diagonalización se obtienen infinitos modos de Floquet y cuasienergías. Aquí es importante notar que si  $|a(t)\rangle$  es un modo de Floquet con cuasienergía  $\epsilon_a$ , entonces  $|am(t)\rangle \equiv e^{im\omega t} |a(t)\rangle$  también es un modo de Floquet, con cuasienergía  $\epsilon_{am} \equiv \epsilon_a + m\hbar\omega$ . Sin embargo ambos generan la misma solución de  $H(t)$ :  $\psi_a(t) = \psi_{am}(t)$ . De esta manera vemos que los infinitos modos de Floquet se agrupan en familias de soluciones  $\{\tilde{\epsilon}_a\} = \{\epsilon_a + m\hbar\omega\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de forma que las soluciones de una misma familia pueden ser trasladadas a la primer zona de Brillouin. Por lo tanto una vez que se obtienen los modos de Floquet debemos restringirnos a aquellos que se encuentren en dicha zona ya que el resto sólo aporta réplicas de los mismos. Así conseguimos los  $d$  autoestados de  $H(t)$ .

En forma ilustrativa mostramos las componentes de Fourier de los Hamiltonianos efectivos de Jaynes-Cummings  $H^{(n)}$  obtenidos en la sección 3.2:

$$H^{(n)[0]} = \hbar \begin{pmatrix} (n + \frac{1}{2})\omega_r + \delta/2 & -ig\sqrt{n+1} \\ ig\sqrt{n+1} & (n + \frac{1}{2})\omega_r - \delta/2 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$H^{(n)[\pm 1]} = \begin{pmatrix} A/4 & 0 \\ 0 & -A/4 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

$$H^{(n)[\neq 0, \pm 1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Finalmente con esto construimos la matriz  $\mathcal{H}^{(n)}$  que resulta ser tridiagonal y la resolvemos numéricamente truncando el número de bloques de Floquet.

### 4.2.1. Probabilidades de transición

Como mostramos en la sección anterior, dado un estado inicial general del sistema  $|\alpha\rangle = |\psi(t_0)\rangle = \sum_a c_a e^{-i\epsilon_a t_0/\hbar} |a(t_0)\rangle$ , la evolución temporal del mismo se puede obtener mediante el operador evolución  $U(t, t_0) = \sum_a e^{-i\epsilon_a(t-t_0)/\hbar} |a(t)\rangle \langle a(t_0)|$ , de manera que  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$ . Luego, la probabilidad de encontrar al sistema en un dado estado  $\beta$  a tiempo  $t$  resulta  $P_{\alpha \rightarrow \beta}(t, t_0) = |\langle \beta | U(t, t_0) | \alpha \rangle|^2$ . Reemplazando la expresión anterior del operador evolución y haciendo uso del desarrollo de Fourier de los modos de Floquet (4.22) llegamos a la siguiente expresión

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t, t_0) = \sum_a \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} e^{-i[\epsilon_b - \epsilon_a + (k_3 - k_1)\hbar\omega](t-t_0)/\hbar} e^{-i(k_1 - k_2 - k_3 + k_4)\omega t_0} \quad (4.27)$$

$$\langle \beta | a_{k_1} \rangle \langle a_{k_2} | \alpha \rangle \langle \alpha | b_{k_4} \rangle \langle b_{k_3} | \beta \rangle, \quad (4.28)$$

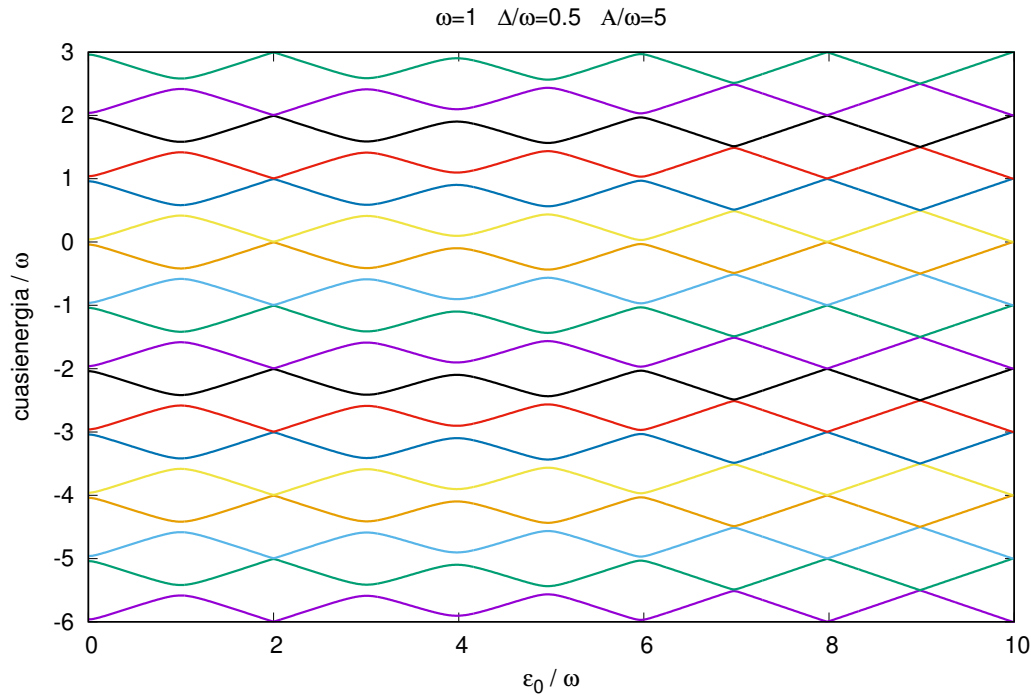
en donde la primer sumatoria recorre todos los modos de Floquet y la segunda los índices de Fourier.

En los experimentos, el tiempo inicial  $t_0$  (o equivalentemente la fase inicial del flujo magnético vista por el *qubit*) no está bien definido. Por lo tanto la cantidad de interés suele ser la probabilidad de transición promediada sobre los tiempos iniciales  $t_0$  y a su vez promediada en un período del forzamiento. Haciendo el cálculo, obtenemos la siguiente expresión para dicha cantidad

$$\bar{P}_{\alpha \rightarrow \beta} = \sum_a \sum_{k_1 k_2} |\langle \beta | a_{k_1} \rangle|^2 |\langle a_{k_2} | \alpha \rangle|^2. \quad (4.29)$$

### 4.2.2. Ejemplo de aplicación: *qubit* forzado aislado

Con fines ilustrativos para el lector, aquí mostraremos los resultados que se obtienen al aplicar el Formalismo de Floquet al caso sencillo de un *qubit* forzado. La Figura 4.7 muestra las cuasienergías del *qubit* aislado tomando  $\Delta = 0.5$ ,  $\omega = 1$  y  $A=5$ , obtenidas numéricamente a partir del formalismo de Floquet.

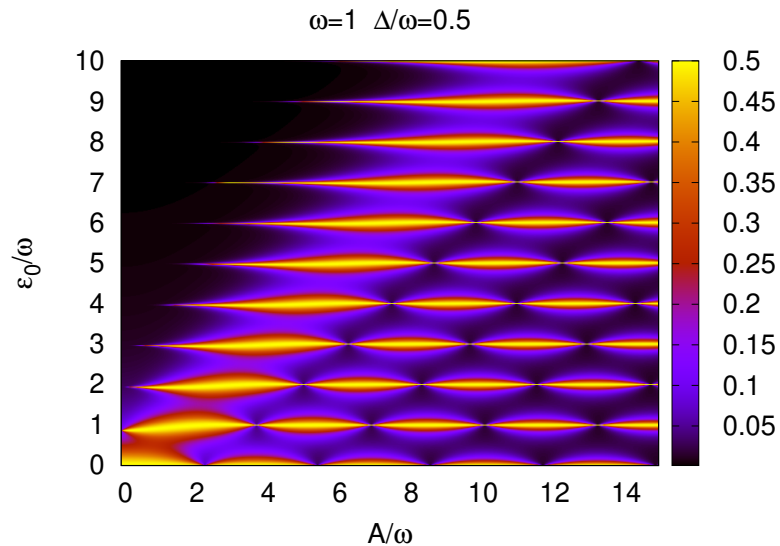


**Figura 4.7:** Cuasienergías para el *qubit* forzado aislado, con  $\Delta = 0.5$ ,  $\omega = 1$  y  $A=5$

Las cuasienergías contenidas en el rango  $(-0.5, 0.5)$  corresponden a la primera zona de Brillouin y el resto son réplicas. Como se puede observar para valores suficientemente grandes de  $\epsilon_0$  los niveles se vuelven líneas rectas. Esto se debe a que en esta situación  $\epsilon_0$  predomina frente a los demás parámetros que aparecen en el Hamiltoniano de Floquet. Despreciando dichos parámetros,  $\mathcal{H}$  es diagonal con elementos de matriz  $\pm\epsilon_0/2 + m\hbar\omega$  con  $m$  entero. La Figura 4.8 muestra el mapa de probabilidades de transición del estado inicial  $|\downarrow\rangle$  al  $|\uparrow\rangle$  del *qubit* promediadas temporalmente, considerando  $\Delta=0.5$  y  $\omega = 1$ . En este gráfico observamos que cuando  $\epsilon_0$  es un múltiplo de  $\omega$  el *qubit* se encuentra en resonancia con el forzamiento y es donde se obtienen las probabilidades de transición máxima. En esa situación el *qubit* se encuentra en promedio la mitad del tiempo en el estado  $|\uparrow\rangle$  y la mitad del tiempo en el estado  $|\downarrow\rangle$ . Adicionalmente vemos que alrededor de los valores de resonancia exactos se forman lóbulos con probabilidades de transición también altas y que disminuyen moduladamente a medida que  $\epsilon_0$  se aleja de la situación de resonancia. Como vimos en la sección 3.2.1 cuando realizamos aproximaciones analíticas para las probabilidades de transición en el régimen de forzamiento rápido, ese

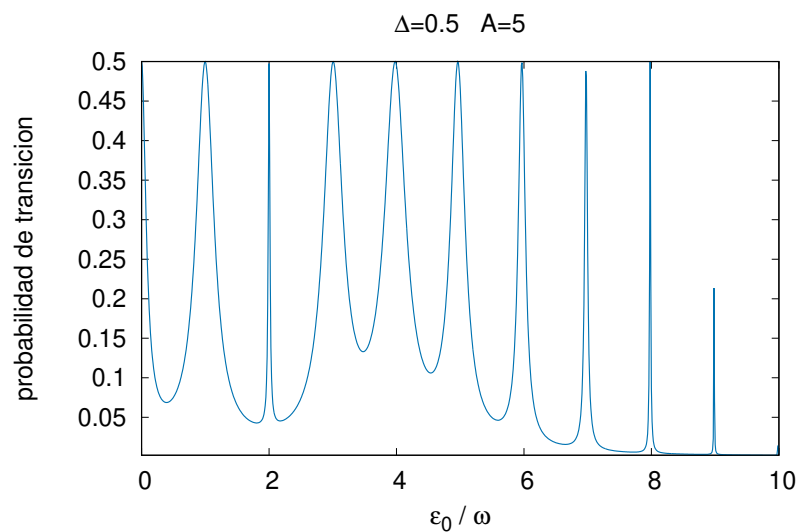


comportamiento está asociado a funciones de Bessel. También volvemos a recalcar que para cada  $\epsilon_0$  existe un valor mínimo de  $A$  a partir del cual son posibles las transiciones, por debajo de dicho valor la probabilidad es nula ya que el *qubit* nunca se acerca al cruce evitado.



**Figura 4.8:** Mapa de probabilidades de transición del estado inicial  $|\downarrow\rangle$  al  $|\uparrow\rangle$  promediadas temporalmente para el *qubit* forzado aislado, con  $\Delta = 0.5$  y frecuencia del forzamiento  $\omega = 1$

La Figura 4.9 muestra un corte del mapa de probabilidades correspondiente a  $A = 5$ . En este gráfico se aprecian los máximos correspondientes a cada condición de resonancia.



**Figura 4.9:** Probabilidad de transición del estado inicial *down* al *up* promediadas temporalmente para el *qubit* forzado aislado, con  $\Delta = 0.5$ ,  $\omega = 1$  y  $A = 5$



# Capítulo 5

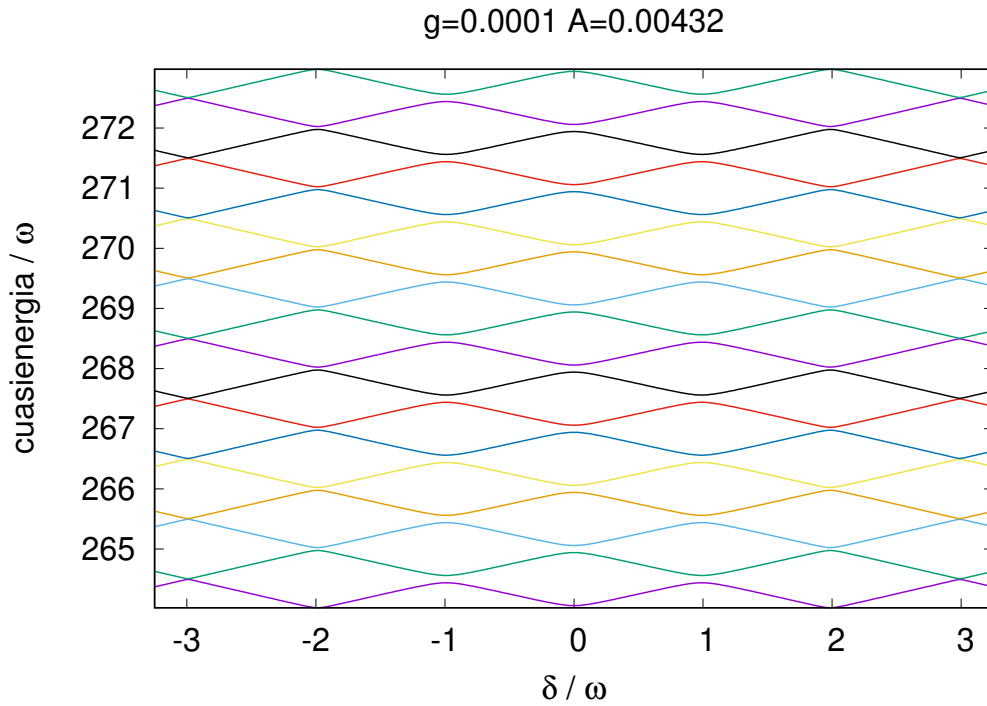
## Modelo de JC: Resultados para el sistema forzado sin disipación

En este capítulo exponemos los resultados obtenidos para el régimen de forzamiento donde es válido el Modelo de Jaynes-Cummings, es decir, alrededor de la condición de resonancia *qubit*-resonador. En esta situación el problema de estudio se separa en el de *qubits* efectivos independientes entre sí que presentan un corrimiento global en energía y un *gap* dependientes del número de fotones. El Hamiltoniano efectivo de  $2 \times 2$  correspondiente al subespacio de Hilbert  $\{|\uparrow, n\rangle, |\downarrow, n+1\rangle\}$  es

$$H^{(n)} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\hbar\delta + A \cos \omega t) & -i\Delta_n \\ i\Delta_n & -(\hbar\delta + A \cos \omega t) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

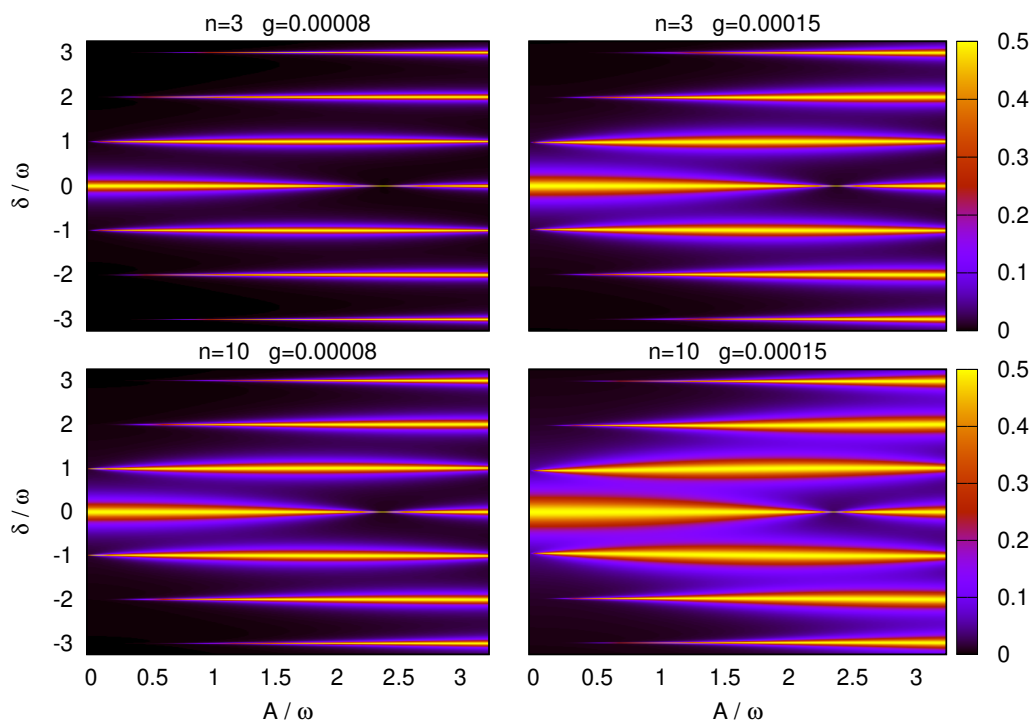
escrito en términos del *detuning*  $\delta = \epsilon_0/\hbar - \omega_r$ . Los parámetros utilizados son:  $\omega = 0,003$ ,  $\omega_r = 0,08$ ,  $\delta_{max} = 3,25\omega$ ,  $A_{max} = 3,25\hbar\omega$  y  $\hbar g = 0,00015$  ó  $0,009$ . En lo que sigue nos restringimos a un régimen de forzamiento rápido, ya que es el que permite un manejo y control confiables sobre las poblaciones del *qubit* y además puede ser comparado con resultados analíticos. Primero analizaremos los patrones de resonancias obtenidos mediante interferometría de amplitud y luego consideraremos en detalle las oscilaciones temporales y su dependencia con los parámetros involucrados.

La Figura 5.1 muestra las cuasienergías obtenidas numéricamente correspondientes al subespacio con  $n = 10$ , es decir en el que se consideran los estados  $|\uparrow, 10\rangle$  y  $|\downarrow, 11\rangle$ , tomando intensidad de acoplamiento  $\hbar g = 0,0001$  y amplitud del forzamiento  $A = 0,00432$ . Vemos que es similar al gráfico correspondiente al *qubit* aislado y sacamos las mismas conclusiones del mismo. En este caso, la intensidad del acoplamiento  $g$  y el número de bloque con el que se trabaja  $n$  aparecen en el Hamiltoniano únicamente a través del *gap* efectivo  $\Delta_n = 2\hbar g\sqrt{n+1}$  y también a través del corrimiento en las energías  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_r$ .



**Figura 5.1:** Cuasienergías para el *qubit* forzado acoplado a la línea de transmisión, correspondiente a tomar  $g = 0,0001$  y  $A = 0,00432$  para el bloque con  $n = 10$

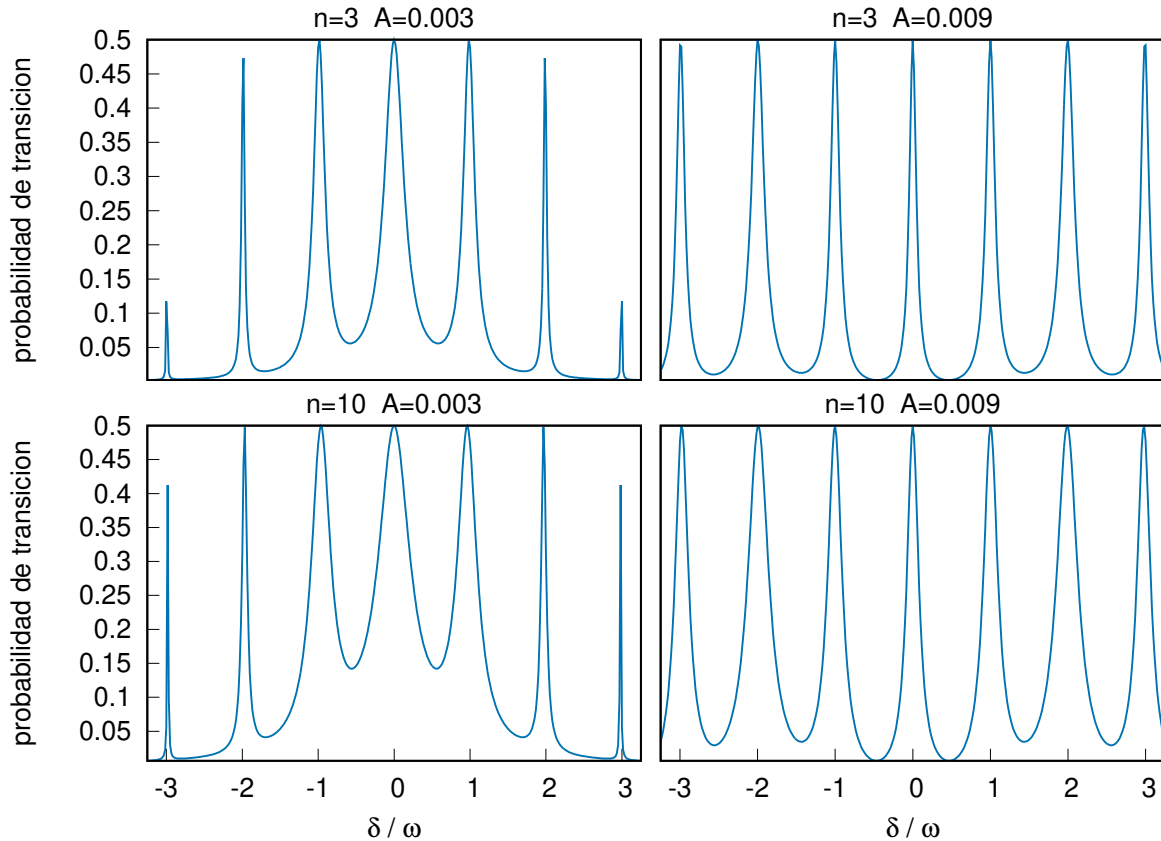
La Figura 5.2 muestra los resultados numéricos para los mapas de las probabilidades de transición promediada en un período del forzamiento con diferentes valores de  $g$  y  $n$ .



**Figura 5.2:** Probabilidad de transición del estado inicial  $|\downarrow n+1\rangle$  al  $|\uparrow n\rangle$  promediada en un período del forzamiento para el *qubit* acoplado al resonador fotónico, tomando diferentes valores de  $n$  y  $g$ .

Podemos ver que a mayor número de fotones o mayor  $g$  aumenta el ancho de los lóbulos alrededor de las resonancias debido al aumento de  $\Delta_n$ .

De aquí en adelante trabajaremos siempre con  $g = 0,00015$ . La Figura 5.3 muestra las probabilidades de transición promediadas en un período de forzamiento para diferentes valores de  $n$  y  $A$ . En este gráfico podemos apreciar la estructura de curvas lorentzianas centradas en las diferentes resonancias.



**Figura 5.3:** Probabilidad de transición del estado inicial  $|\downarrow n+1\rangle$  al  $|\uparrow n\rangle$  promediada temporalmente para el *qubit* forzado acoplado al resonador fotónico, tomando  $g = 0.00015$  y considerando diferentes valores de  $n$  y  $A$

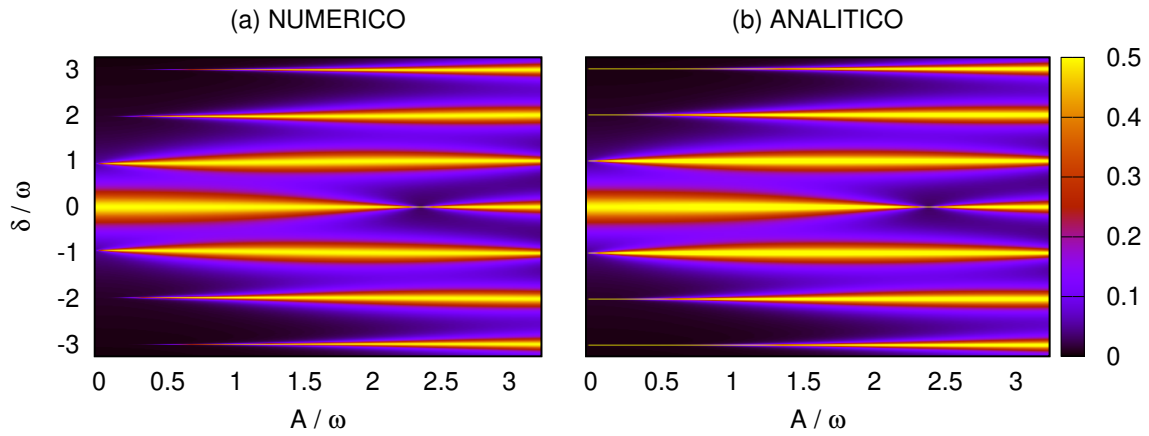
En la Figura 5.4 comparamos los resultados numéricos exactos y la solución analítica obtenida a partir de una aproximación de onda rotante, para  $n = 10$ . Ambos gráficos demuestran un muy buen acuerdo.

El panel (b) de la Figura 5.4 se realizó aplicando las siguientes expresiones:

$$\bar{P}_{|\downarrow, n+1\rangle \rightarrow |\uparrow, n\rangle}^N = \frac{1}{2} \frac{[\Delta_n J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega})]^2}{[\hbar(\delta - N\omega)]^2 + [\Delta_n J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega})]^2}. \quad (5.2)$$

$$\bar{P}_{|\downarrow, n+1\rangle \rightarrow |\uparrow, n\rangle} = \sum_N \bar{P}_{|\downarrow, n+1\rangle \rightarrow |\uparrow, n\rangle}^N, \quad (5.3)$$

que fueron deducidas en la subsección 4.1.1 para la condición de forzamiento rápido.



**Figura 5.4:** Comparación de las probabilidades de transición promediadas con parámetros  $n = 10$  y  $g = 0.00015$  (a) obtenidas numéricamente y (b) con la aproximación analítica.

Vemos que en la condición exacta de resonancia la probabilidad de transición promediada es  $1/2$ . Por otro lado al separarse de dicha condición, resulta que el ancho característico de los diferentes lóbulos se relaciona con una competencia entre el término  $[\hbar(\delta - N\omega)]^2$  y  $[\Delta_n J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega})]^2$  del denominador.

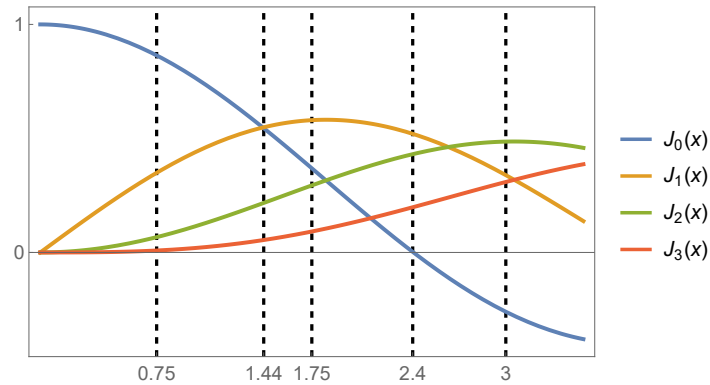
A continuación consideraremos la probabilidad de transición instantánea  $|\downarrow n+1\rangle \rightarrow |\uparrow n\rangle$ . Para su interpretación tendremos las expresiones analíticas en aproximación de onda rotante (4.10) y (4.12), que transcribimos a continuación:

$$P_{|\downarrow, n+1\rangle \rightarrow |\uparrow, n\rangle}^N(t) = \frac{1}{2} \frac{[\Delta_n J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega})]^2}{(\hbar\Omega_N)^2} (1 - \cos \Omega_N t) \quad (5.4)$$

$$P_{|\downarrow, n+1\rangle \rightarrow |\uparrow, n\rangle}^{Nres}(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega_N t), \quad (5.5)$$

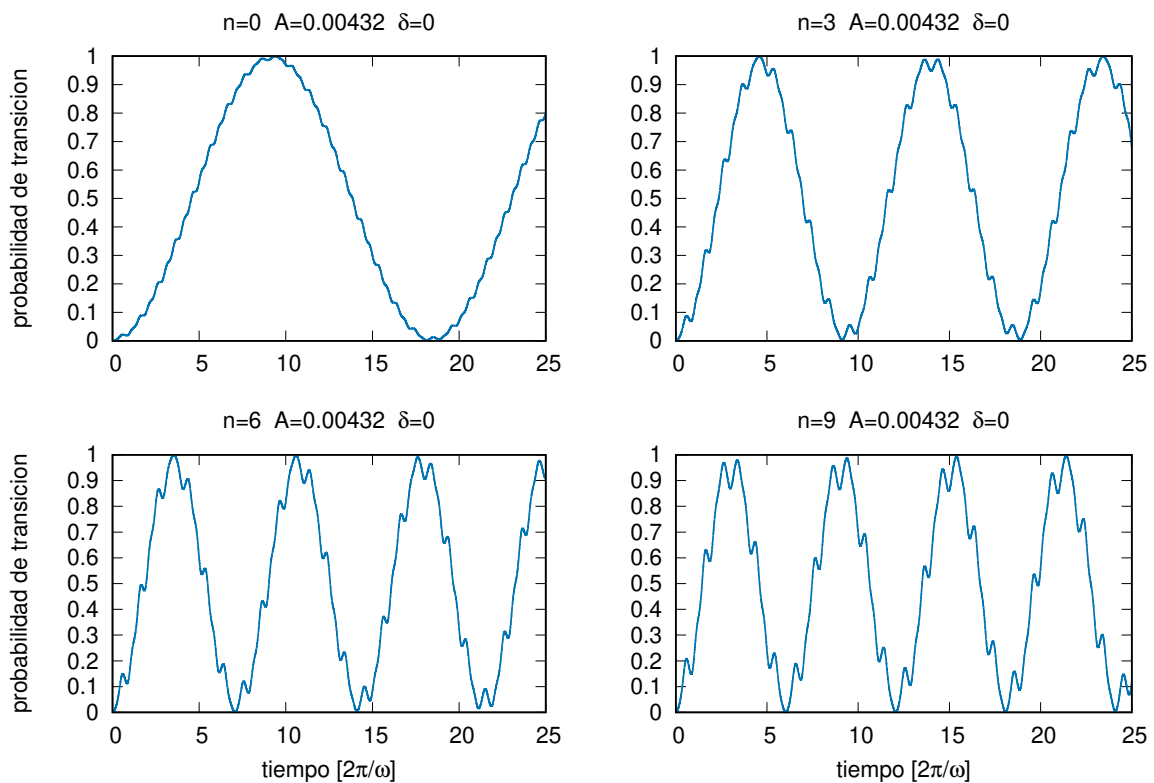
siendo  $\hbar\Omega_N = \Delta_n J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega}) = 2\hbar g \sqrt{n+1} J_{-N}(\frac{A}{\hbar\omega})$  la frecuencia de Rabi generalizada.

En la Figura 5.5 mostramos las funciones de Bessel y los valores  $A/\hbar\omega$  que analizamos en esta sección, esto resulta visualmente útil para interpretar los resultados.



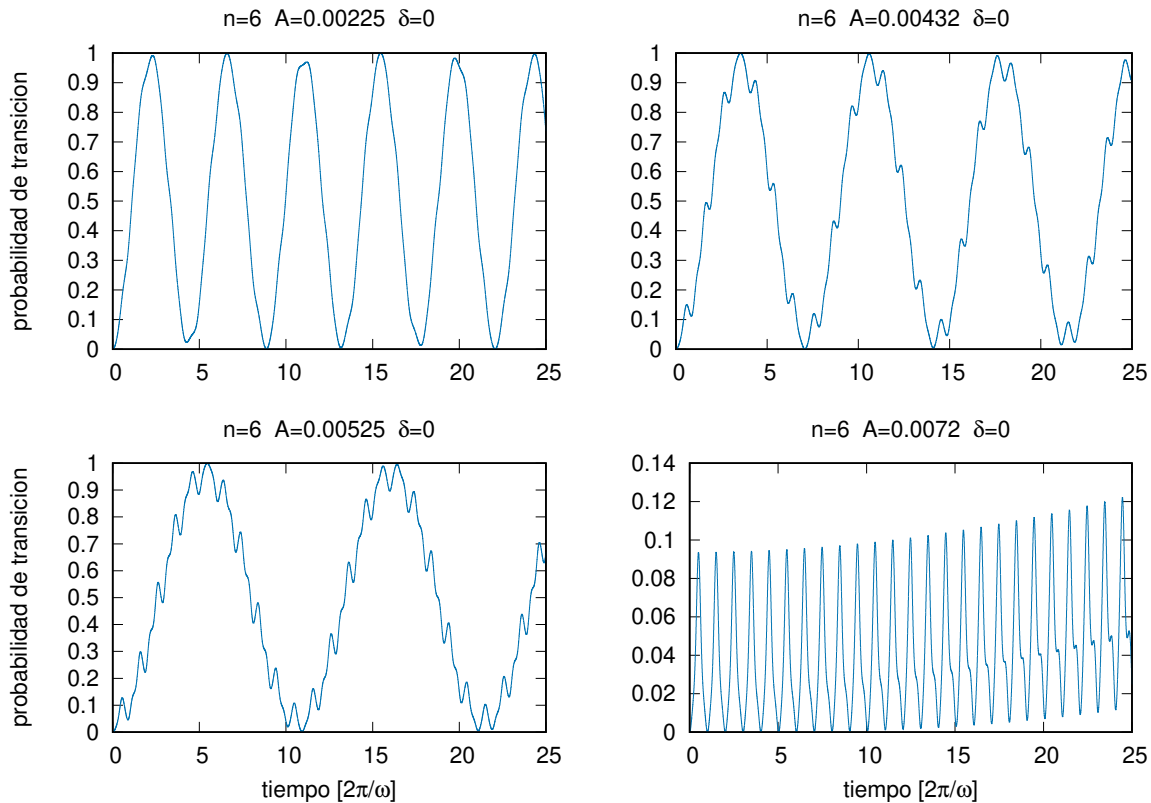
**Figura 5.5:** Funciones de Bessel y los puntos en donde se evaluaron para los cálculos de esta sección

En la Figura 5.6 exponemos la probabilidad de transición temporal obtenida numéricamente para diferentes valores de  $n$ , a igualdad de condiciones en  $\delta$  y  $A$ . Es posible apreciar que la frecuencia de las oscilaciones de Rabi aumenta al incrementar  $n$ .



**Figura 5.6:** Evolución temporal de la probabilidad de transición variando  $n$ , para  $A=0.00432$  y  $\delta=0$

En la Figura 5.7 mostramos la probabilidad de transición en la resonancia  $\delta = 0$  con  $n = 6$  y diferentes valores de  $A$ . Vemos cómo la frecuencia de Rabi se ve afectada por el punto en que se evalúan las funciones de Bessel al variar  $A$ . Notamos que los resultados muestran oscilaciones de mayor frecuencia no predichas por la aproximación de onda rotante. Estas oscilaciones se deben los rangos del forzamiento en que el sistema atraviesa la región del cruce evitado.

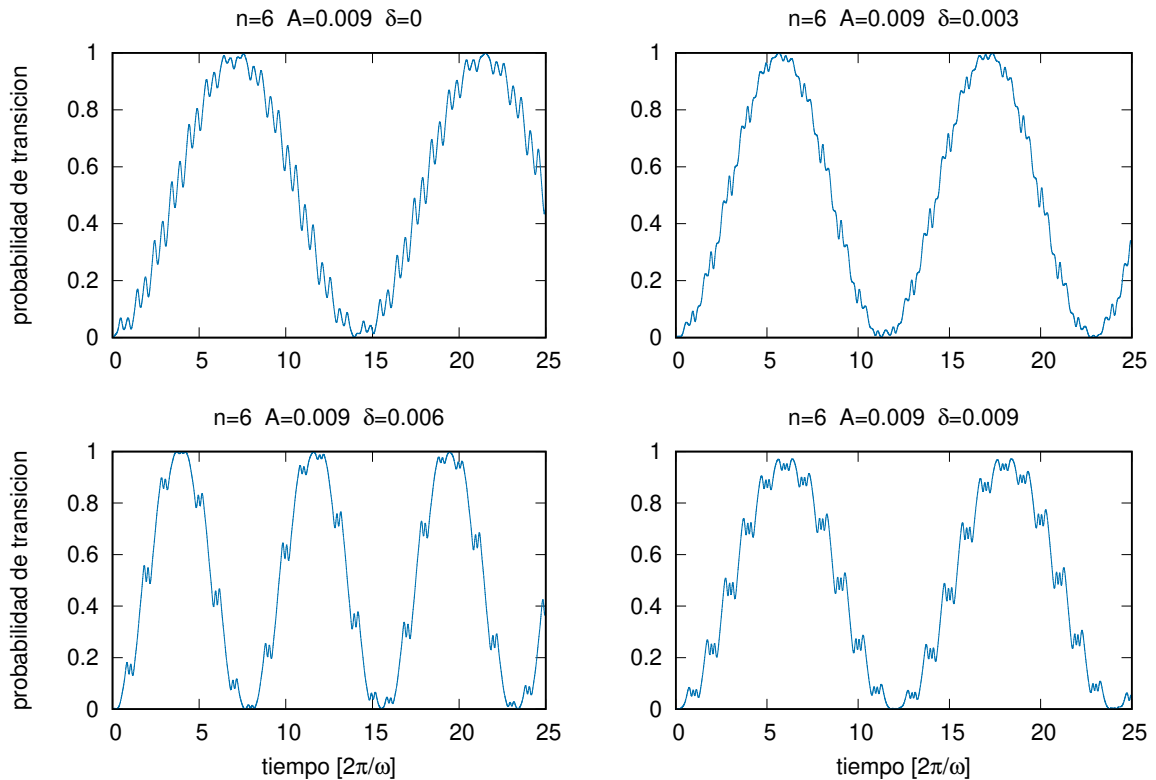


**Figura 5.7:** Evolución temporal de la probabilidad de transición, variando la amplitud del forzamiento, para los parámetros  $\delta = 0$  y  $n = 6$

Se puede observar que las oscilaciones rápidas son sensibles a la amplitud del forzamiento  $A$  y que en menor medida al número de fotones en el resonador. Esto se asocia al hecho de que para las transiciones de Landau-Zener-Stückelberg la probabilidad de transición en cada pasaje por el cruce evitado está dada por  $P_{LZS} \propto e^{-\Delta_n^2/A\hbar\omega}$  [8, 13].

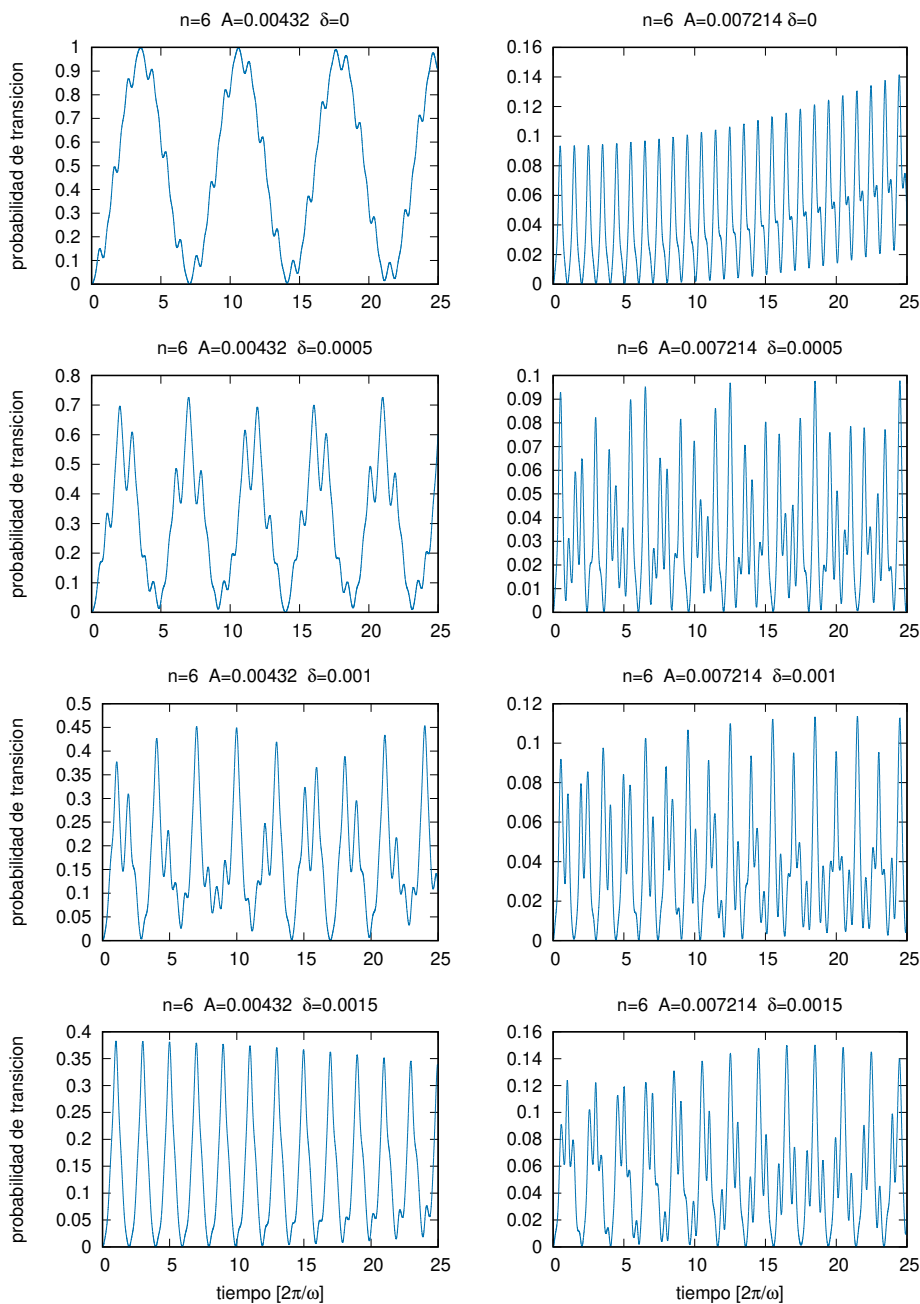


La Figura 5.8 muestra gráficos en los que se cambió el desfase  $\delta$ , manteniendo constantes  $n$  y  $A$ . La gran diferencia en la frecuencia de Rabi se debe a que al evaluar en diferentes resonancias se está evaluando el mismo argumento  $A/\hbar\omega$  pero en diferentes funciones de Bessel. A su vez vemos que las oscilaciones de mayor frecuencia son muy sensibles al cambio de  $\delta$  ya que eso modifica la velocidad con la que se atraviesa la región del cruce evitado.



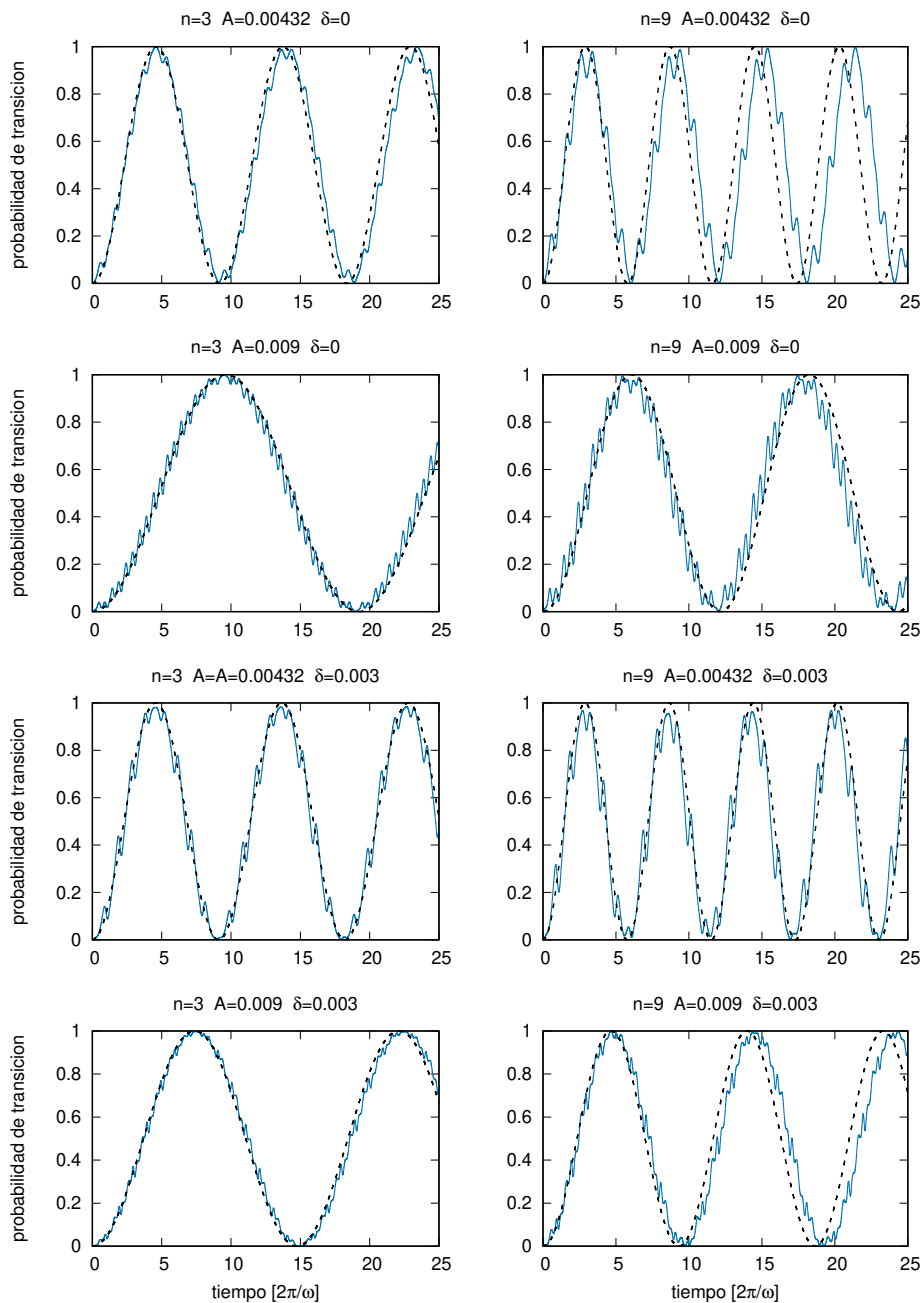
**Figura 5.8:** Evolución temporal de la probabilidad de transición variando el desfase  $\delta$ , para  $n = 6$  y  $A = 0.009$

En la Figura 5.9 mostramos los resultados tomando defasajes entre 0 y  $\omega/2$  para dos valores de amplitud diferentes. Esto nos permite analizar cómo cambian las probabilidades de transición al alejarse de la situación de resonancia  $\delta = 0$  y cómo varía esto al tomar un valor de  $A$  de manera que  $A/\hbar\omega$  corresponda a una zona comprendida dentro de un lóbulo o a un punto donde  $J_0(A/\hbar\omega) = 0$ . Como era de esperarse, en el primer caso vemos que la probabilidad de transición máxima disminuye al alejarse de la resonancia mientras que en el segundo no se observan grandes cambios, manteniéndose probabilidades cercanas a cero en todo momento.



**Figura 5.9:** Evolución temporal en situaciones que se alejan de la resonancia  $\delta = 0$ , para  $n = 6$ ,  $A = 0.00432$  y  $A = 0.007214$

Finalmente, luego de considerar los resultados numéricos para analizar las diferencias en la dinámica debido a los parámetros  $A$ ,  $\delta$  y  $n$ ; mostramos a continuación las probabilidades de transición obtenidas con la aproximación analítica (RWA) comparándolas con los resultados numéricos exactos:



**Figura 5.10:** Comparación entre resultados numéricos exactos y analíticos en aproximación de onda rotante para diferentes condiciones de  $A$ ,  $n$  y  $\delta$

Podemos observar en general una muy buena concordancia entre los resultados numéricos y analíticos.



# Capítulo 6

## Efectos de la disipación en la dinámica del sistema forzado

Uno de los grandes desafíos de la computación cuántica es la lucha contra la decoherencia. El problema se plantea porque las propiedades cuánticas de un sistema como el entrelazamiento y la superposición son muy frágiles y se destruyen con facilidad debido a la interacción con el entorno, que es un medio ruidoso no controlado con muchos grados de libertad. Por esa razón es deseable aislar el sistema de interés lo mejor posible del mundo externo. Sin embargo no es de utilidad aislarlo completamente ya que debe ser posible prepararlo en un estado inicial, manipularlo y realizar mediciones sobre él. Como resultado, cualquier modelado realista debe incluir los efectos del entorno [6].

Cuando un sistema cuántico sin forzamiento es puesto en contacto con un reservorio térmico, el sistema alcanzará un régimen estacionario en el cual su matriz densidad se volverá diagonal en la base de autoestados del sistema, con poblaciones dadas por el número de ocupación de Boltzmann  $p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}$ . Este estado mezcla resultante corresponde simplemente a un ensamble clásico. Por otro lado, cuando al sistema se le aplica un forzamiento periódico, se lo mantiene constantemente fuera del equilibrio. En ese caso el estado asintótico para tiempos largos también es periódico en el tiempo y posee una matriz densidad diagonal en la base de Floquet [27].

### 6.1. Ecuación Maestra de Floquet-Born-Markov

Esta sección está basada en la Referencia [27]. Aquí describimos el formalismo utilizado en este trabajo para obtener la dinámica de un sistema cuántico forzado periódicamente cuando están presentes efectos de disipación.

La evolución de un sistema cuántico periódico en el tiempo en contacto un baño está dada por el siguiente Hamiltoniano compuesto

$$H_{\text{tot}}(t) = H_s(t) + H_{sb} + H_b, \quad (6.1)$$

en donde  $H_s(t) = H_s(t + \frac{2\pi}{\omega})$  es el Hamiltoniano del sistema de interés,  $H_b$  describe el baño y  $H_{sb}$  es el término de interacción. La dinámica total del sistema con el baño está caracterizada a través del operador densidad  $\rho_{\text{tot}}$ , que evoluciona de acuerdo a la ecuación de von Neumann en la representación de interacción

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{\text{tot}}(t) = [\tilde{H}_{sb}(t), \tilde{\rho}_{\text{tot}}(t)], \quad (6.2)$$

en donde los operadores transforman respecto a la representación de Schrödinger como  $\tilde{O}(t) = U^\dagger(t) O U(t)$ , siendo el propagador

$$U(t) = \hat{\mathcal{T}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [H_s(t') + H_b]\right).$$

Integrando la ecuación (6.2), reinsertándola en sí misma y trazando sobre los grados de libertad del baño se obtiene una ecuación integrodiferencial exacta para la evolución del operador densidad reducido del sistema  $\rho = \text{Tr}_b(\rho_{\text{tot}})$ , que resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_b [\tilde{H}_{sb}(t), \rho_{\text{tot}}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_b [\tilde{H}_{sb}(t), [\tilde{H}_{sb}(t'), \tilde{\rho}_{\text{tot}}(t')]]. \quad (6.3)$$

En forma general, esta ecuación no es resoluble y para obtener una expresión útil se van a tener en cuenta las siguientes condiciones y aproximaciones:

- Se especifica la interacción como  $H_{sb} = \gamma A \otimes B$ , en donde A y B son operadores hermíticos que actúan sobre el sistema y el baño, respectivamente, y  $\gamma$  es la intensidad del acoplamiento. Por compatibilidad con la explicación del modelo de Caldeira-Leggett absorberemos la constante  $\gamma$  dentro del operador del baño
- Sistema y baño inicialmente descorrelacionados  $\tilde{\rho}_{\text{tot}}(0) = \tilde{\rho}_s(0) \otimes \tilde{\rho}_b(0)$
- Interacción con promedio cero  $\langle \tilde{B}(t) \rangle = \text{Tr}_b(\tilde{B}(t)\rho_b) = 0$
- Aproximación de Born: Se considera que la interacción sistema-baño es débil y que el baño térmico es grande comparado con el sistema, de modo que el estado del baño no se ve afectado por el sistema y se desprecian las correlaciones entre ambos.  $\tilde{\rho}_{\text{tot}}(t) \approx \tilde{\rho}_s(t) \otimes \rho_b$  dentro de la integral. Se supone entonces que el baño se encuentra en un estado térmico estacionario  $\tilde{\rho}_b = \rho_b = \frac{e^{-\beta H_b}}{\text{Tr}_b(e^{-\beta H_b})}$  que es simplemente un ensamble clásico sin coherencias con los números de ocupación determinados por los pesos estadísticos de Boltzmann.

- Aproximación de Markov: El tiempo de correlación del baño es pequeño comparado con el tiempo característico de evolución del sistema, de manera que se pueden despreciar efectos de memoria con el baño y la tasa de evolución de la matriz densidad del sistema depende sólo de su valor actual y no de tiempos anteriores.

De este modo se obtiene la ecuación maestra en aproximación de Born-Markov

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = & -\frac{i}{\hbar} [H_s(t), \rho(t)] \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' G(t') \left( A(t) \tilde{A}(t-t') \rho(t) - \tilde{A}(t-t') \rho(t) A(t) \right) \\ & + G^*(t') \left( \rho(t) \tilde{A}(t-t') A(t) - A(t) \rho(t) \tilde{A}(t-t') \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde  $G(t-t') = \langle \tilde{B}(t) \tilde{B}(t') \rangle_b = \text{Tr}_b \left( \tilde{B}(t) \tilde{B}(t') \rho_b \right)$  es la función de correlación del baño.

A continuación reescribiremos la ecuación de Born-Markov en la base de Floquet. Dada la ecuación de Schrödinger del sistema aislado  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H_s(t) |\psi\rangle$ , el Teorema de Floquet establece que existe una base completa ortonormal de autofunciones de  $H_s(t)$  que tiene la forma  $|\psi_j(t)\rangle = e^{-i\epsilon_j t} |u_j(t)\rangle$ , en donde  $|u_j(t)\rangle$  son modos de Floquet que satisfacen  $|u_j(t)\rangle = |u_j(t + 2\pi/\omega)\rangle$  y  $\epsilon_j$  son cuasienergías elegidas en el intervalo  $(0, \omega)$ . Estos se obtienen de diagonalizar el Hamiltoniano de Floquet  $H_F = H_s(t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ , es decir,

$$H_F |u_j(t)\rangle = \epsilon_j |u_j(t)\rangle. \quad (6.5)$$

Los modos de Floquet se pueden escribir expandidos en Fourier  $|u_j(t)\rangle = \sum_M |u_j(M)\rangle e^{iM\omega t}$  y utilizarse para obtener los elementos de matriz del operador densidad en esta base

$$\rho_{ij}(t) = \langle u_i(t) | \rho(t) | u_j(t) \rangle. \quad (6.6)$$

Por otro lado los elementos de matriz  $\langle u_i(t) | A(t) | u_j(t) \rangle$  son periódicos en el tiempo y se pueden expandir en Fourier

$$A_{ij}(t) = \sum_L A_{ij}(L) e^{iL\omega t}. \quad (6.7)$$

De esta forma se obtiene la ecuación maestra de Floquet-Markov

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \epsilon_{ij} \right) \rho_{ij}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} \left( \rho_{lj}(t) R_{ik;lk}(t) + \rho_{il}(t) R_{jk;lk}^*(t) - \rho_{kl}(t) (R_{lj;ki}(t) + R_{ki;lj}^*(t)) \right), \quad (6.8)$$

que está expresada en término de las tasas de transición termodinámicas definidas como

$$R_{lj;ki}(t) = \sum_L R_{lj;ki}(L) e^{iL\omega t}, \quad (6.9)$$

con

$$R_{lj;ki}(L) = \sum_K R_{lj;ki}^{(K)}(L) = 2\pi \frac{1}{\hbar} \sum_K A_{lj}(K+L) A_{ki}^*(K) g(\epsilon_{ik} - K\hbar\omega), \quad (6.10)$$

en donde  $g(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt G(t) e^{-iEt/\hbar}$  es la transformada de Fourier de la función de correlación (escaleada correctamente en unidades de energía) y  $\epsilon_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j$  son las diferencias entre cuasienergías. En este punto del desarrollo promediamos las tasas de transición en un período del forzamiento, suponiendo que el mismo es menor que el tiempo de relajación característico del sistema. Es decir, hicimos la aproximación  $R_{lj;ki}(t) \approx R_{lj;ki} = R_{lj;ki}(K=0) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt R_{lj;ki}(t)$ , siendo  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ .

De esta manera definimos la matriz

$$M_{ij;kl} = \frac{1}{2} \left( \sum_m R_{im;km} \delta_{jl} + \sum_m R_{jm;lm}^* \delta_{ik} - R_{lj;ki} - R_{ki;lj}^* \right) + \frac{i}{\hbar} \epsilon_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (6.11)$$

y reescribimos el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas como

$$\dot{\rho}_{ij} = \sum_{k,l} M_{ij;kl} \rho_{kl}. \quad (6.12)$$

## 6.2. Evolución temporal y probabilidades de transición

Para calcular las probabilidades de transición primero es necesario resolver la ecuación (6.12) y así obtener la matriz densidad reducida del sistema a todo tiempo. En esta ecuación  $M$  es un superoperador que actúa sobre  $\rho(t)$ . Para un sistema de  $N$  niveles es posible hacer un cambio de notación y pasar a representar la matriz densidad como un vector de dimensión  $N^2$  y  $M$  como una matriz de  $N^2 \times N^2$ , de manera que la ecuación ahora es:

$$\frac{d}{dt} |\rho(t)\rangle = -\mathcal{M} |\rho(t)\rangle. \quad (6.13)$$

Diagonalizando esta matriz se obtienen los autovalores  $\lambda_\mu$  con sus respectivos autovalores a derecha e izquierda:



$$\begin{aligned} \mathcal{M}|r_\mu) &= \lambda_\mu|r_\mu) \\ (l_\mu|\mathcal{M} &= \lambda_\mu (l_\mu| \end{aligned} \quad (6.14)$$

Finalmente con estos elementos calculamos la matriz densidad a todo tiempo:

$$|\rho(t)) = \sum_{\mu} (l_\mu|\rho(0))e^{-\lambda_\mu t}|r_\mu) \quad (6.15)$$

Los autovalores  $\lambda_\mu \in \mathbb{C}$  cumplen que  $\text{Re}(\lambda_\mu) \geq 0$ . En particular siempre existe un autovalor igual a cero y es el que determina la solución en el régimen asintótico.

### 6.3. Modelo de Caldeira-Leggett

En las secciones anteriores del presente capítulo desarrollamos el tratamiento general para estudiar la evolución de un sistema con forzamiento periódico en contacto con un baño. Ahora, para poder aplicarlo a nuestro problema particular, necesitamos establecer cómo modelaremos el entorno y su interacción con el sistema, para lo cual emplearemos el Modelo de Caldeira-Leggett [27-29]. Este modelo describe el movimiento Browniano de una partícula de masa  $m$  y coordenada  $x$  que se mueve en un potencial  $V(x)$  y está acoplada a un entorno fluctuante. Si ninguno de los grados de libertad del baño está fuertemente excitado, entonces es posible representar el mismo como una colección de osciladores armónicos independientes y considerar que el acoplamiento sistema-entorno es lineal. Esto está expresado con los siguientes Hamiltonianos del sistema, baño e interacción, respectivamente:

$$H_s = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (6.16)$$

$$H_b = \sum_n \hbar\omega_n \left( b_n^\dagger b_n + \frac{1}{2} \right) = \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{m_n\omega_n^2}{2} x_n^2 \right) \quad (6.17)$$

$$H_{sb} = -x \sum_n c_n x_n \equiv -xB, \quad (6.18)$$

en donde los osciladores del baño tienen masa  $m_n$ , frecuencia  $\omega_n$  y están acoplados al sistema mediante el operador posición con constante de acoplamiento  $c_n$ .

De esta manera se obtiene el siguiente Hamiltoniano total

$$H = H_s + H_b + H_{sb} = \frac{p^2}{2m} + V(x) + \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{m_n\omega_n^2}{2} \left( x_n - \frac{c_n}{m_n\omega_n^2} x \right)^2 \right), \quad (6.19)$$

en donde se agrega además un contratérmino para evitar que la interacción renormalice las energías del sistema dadas por el potencial  $V(x)$ . Con este modelo para el baño y la interacción con el sistema estamos en condiciones de calcular la función de correlación

del operador relevante del baño y finalmente resolver la dinámica del sistema de la forma que explicamos en las secciones anteriores. Partimos de la expresión para  $B$  en la representación de Schrödinger,

$$B = \sum_n c_n x_n = \sum_n c_n \sqrt{\frac{\hbar}{2m_n \omega_n}} (b_n + b_n^\dagger) \quad (6.20)$$

y luego pasamos a la representación de interacción

$$\tilde{B}(t) = \sum_n c_n \sqrt{\frac{\hbar}{2m_n \omega_n}} (e^{-i\omega_n t} b_n + e^{i\omega_n t} b_n^\dagger). \quad (6.21)$$

Finalmente calculamos la función de correlación, que adquiere la siguiente forma sencilla por tratarse de osciladores independientes:

$$G(t, t') = \left\langle \tilde{B}(t) \tilde{B}(t') \right\rangle_b = \sum_n \frac{\hbar c_n^2}{2m_n \omega_n} \underbrace{\left\langle (e^{-i\omega_n t} b_n + e^{i\omega_n t} b_n^\dagger) (e^{-i\omega_n t'} b_n + e^{i\omega_n t'} b_n^\dagger) \right\rangle_b}_{G_n(t, t')} \quad (6.22)$$

en donde introducimos la función de autocorrelación  $G_n(t, t')$  del operador  $b_n + b_n^\dagger$  correspondiente a cada oscilador. Recordando que estamos tomando el valor medio para un estado térmico del baño, resulta  $G_n(t, t') = e^{i\omega_n(t-t')} n_\beta(\omega_n) + e^{i\omega_n(t'-t)} (n_\beta(\omega_n) + 1)$  siendo  $n_\beta(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega\beta} - 1}$  la función de Bose-Einstein. Aquí vimos en forma explícita que la función de correlación depende únicamente de la diferencia de tiempos  $G(t, t') = G(t - t', 0) \equiv G(t - t')$ , es decir que es estacionaria.

El siguiente paso en el desarrollo es reescribir la función de correlación en términos de la **Densidad Espectral del Baño**  $J(\omega) = \frac{1}{2} \sum_n \frac{c_n^2}{m_n \omega_n} \delta(\omega - \omega_n)$ . Notar que en esta función está codificada toda la información de la colección de osciladores armónicos y la intensidad con la que se acoplan al sistema. La función de correlación resulta:

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_n \frac{\hbar c_n^2}{2m_n \omega_n} [e^{i\omega_n t} n_\beta(\omega_n) + e^{-i\omega_n t} (n_\beta(\omega_n) + 1)] \\ &= \sum_n \frac{\hbar c_n^2}{2m_n \omega_n} \int_0^\infty d\omega \delta(\omega - \omega_n) [e^{i\omega t} n_\beta(\omega) + e^{-i\omega t} (n_\beta(\omega) + 1)] \\ &= \hbar \int_0^\infty d\omega J(\omega) [e^{i\omega t} n_\beta(\omega) + e^{-i\omega t} (n_\beta(\omega) + 1)], \end{aligned} \quad (6.23)$$

de modo que su transformada de Fourier en energías queda como:

$$\begin{aligned} g(E) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) [e^{i(\omega-E/\hbar)t} n_{\beta}(\omega) + e^{-i(\omega+E/\hbar)t} (n_{\beta}(\omega) + 1)] \\ &= \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) [\delta(\omega - E/\hbar) n_{\beta}(\omega) + \delta(\omega + E/\hbar) (n_{\beta}(\omega) + 1)] \end{aligned} \quad (6.24)$$

Por último calculamos explícitamente  $g(E)$  según el signo de  $E$ :

$$g(E) = \begin{cases} J(E/\hbar) n_{\beta}(E/\hbar) & \text{si } E > 0 \\ J(-E/\hbar) (n_{\beta}(-E/\hbar) + 1) = -J(-E/\hbar) n_{\beta}(E/\hbar) & \text{si } E < 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

mientras que para  $E = 0$  obtenemos

$$g(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} J(\omega) [1 + 2n_{\beta}(\omega)]. \quad (6.26)$$

## 6.4. Aplicación al sistema de estudio

En la presente sección resolveremos la dinámica del *qubit* de flujo forzado acoplado al resonador y este último acoplado al campo electromagnético del entorno, que tiene la forma de osciladores armónicos independientes. El Hamiltoniano total resulta:

$$\begin{aligned} H &= \underbrace{\frac{1}{2} (\epsilon(t)\sigma_z + \Delta\sigma_x)}_{H_q} + \underbrace{\hbar g \sigma_y (a^{\dagger} + a)}_{H_{q-r}} + \underbrace{\hbar \omega_r a^{\dagger} a}_{H_r} \\ &+ \underbrace{(a + a^{\dagger}) \sum_n c_n (b_n + b_n^{\dagger})}_{H_{r-em}} + \underbrace{\sum_n \hbar \omega_n b_n^{\dagger} b_n}_{H_{em}} + \underbrace{(a + a^{\dagger})^2 \sum_n \frac{c_n^2}{\hbar \omega_n}}_{norm}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Para obtener una dinámica irreversible se introduce una distribución continua de modos del baño y generalmente se establece una disipación óhmica con la siguiente densidad espectral:

$$J(\omega) = \kappa \omega e^{-\omega/\omega_D}, \quad (6.28)$$

en donde aparece una constante de amortiguamiento  $\kappa$  y además una frecuencia de corte  $\omega_D$ .

Notar que hasta el momento en nuestro problema no hemos especificado cuál es el sistema y cuál el baño, éste es un factor técnico importante para poder aplicar la Ecuación Maestra de Floquet-Born-Markov respetando las hipótesis correspondientes. Consideraremos dos planteamientos diferentes, cada uno de los cuales tiene su validez de acuerdo a la intensidad del acoplamiento *qubit*-cavidad  $g$ :

- Qubit+resonador como sistema: Este esquema se justifica en el hecho de que el parámetro  $\kappa$  que acopla el resonador con el entorno es pequeño. Por lo tanto es un análisis válido para cualquier valor de  $g$
- Qubit como sistema: Este esquema está justificado cuando  $g$  no es demasiado grande. En esta situación consideraremos al conjunto formado por resonador + ruido electromagnético del entorno como baño. Como veremos en la subsección 6.4.2, en este caso existe un mapeo exacto a un **baño estructurado** de osciladores independientes.

### 6.4.1. Resonador incluido como parte del sistema

La Figura 6.1 esquematiza esta situación. Al considerar el *qubit*+resonador como sistema estamos enfrentándonos a un Hamiltoniano con infinitos niveles energéticos. Aunque esto pueda parecer un problema imposible de resolver, para su resolución alcanza con restringirnos a los niveles de menor energía. Esta suposición es similar a la que se hace cuando consideramos únicamente los dos niveles de menor energía de un sistema físico para utilizarlos como *qubit*. En realidad el sistema tiene infinitos niveles de energía, pero manteniendo un régimen de baja temperatura no es posible excitar el sistema a esos niveles y por lo tanto podemos despreciarlos, incluso cuando estamos aplicando un forzamiento al sistema para manipularlo. Existen en la literatura numerosos trabajos que hacen este truncamiento del Hamiltoniano para estudiar su dinámica y estructura de niveles [16].

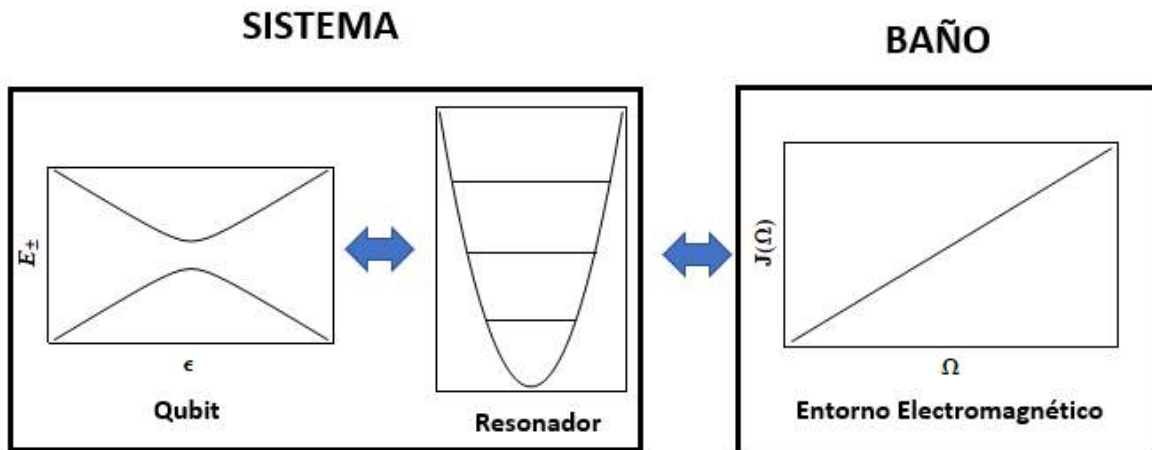
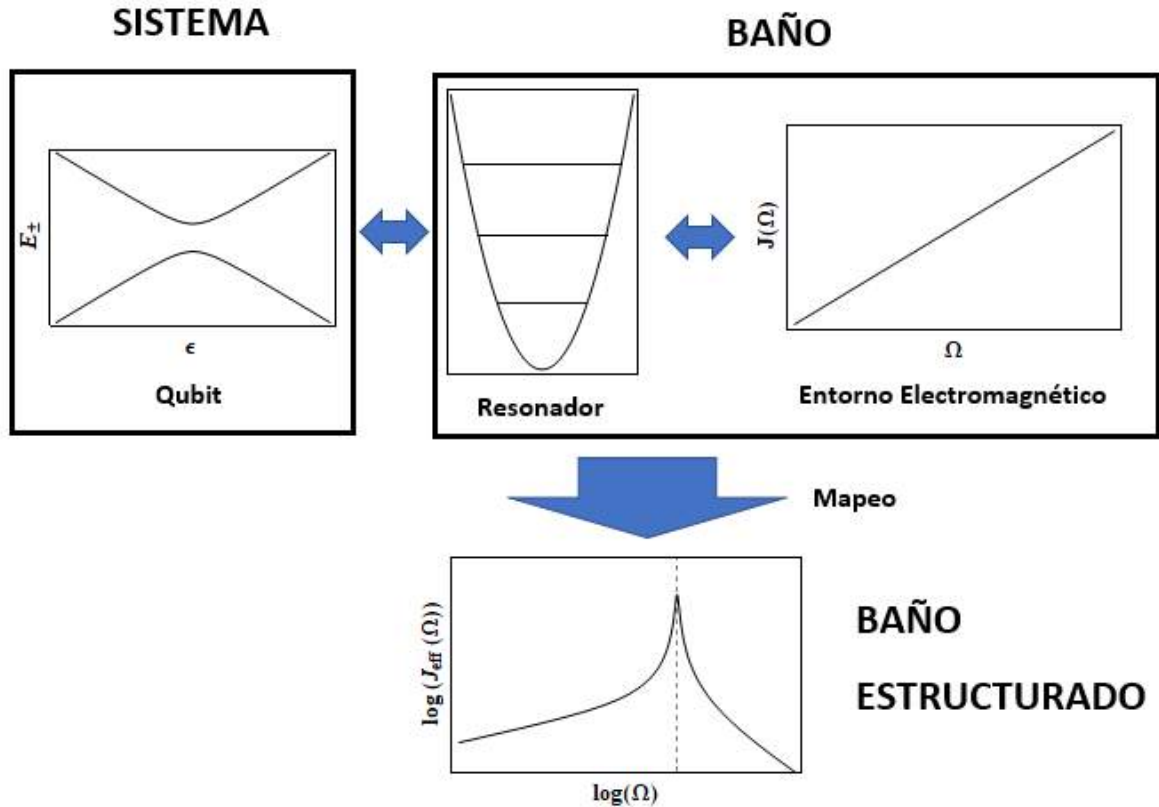


Figura 6.1: Esquema de acoplamiento *qubit*-resonador fuerte

### 6.4.2. Resonador incluido como parte del baño

Cuando el valor de la constante de acoplamiento  $g$  es pequeño se está suponiendo que el *qubit* interactúa débilmente con el resonador, el cual a su vez está acoplado al

entorno. Por lo tanto es apropiado aplicar el desarrollo de Floquet-Born-Markov considerando que el sistema está conformado únicamente por el *qubit*. Este abordamiento se utiliza comúnmente en la literatura siempre que se estudia un *qubit* acoplado a un baño óhmico en forma indirecta a través de un oscilador armónico [16, 30-32]. En esta situación se reemplaza el oscilador armónico + baño óhmico por un único baño de osciladores armónicos independientes. Este cálculo está detallado en [33] y requiere el uso de integrales de camino. En forma resumida el procedimiento es el siguiente: Primero se diagonaliza la parte del Hamiltoniano que no depende del *qubit* para obtener los modos normales. Luego se reescribe el Hamiltoniano total original en término de esos modos normales (osciladores armónicos independientes) acoplados al *qubit*. Finalmente se calcula la función  $J_{eff}(\omega)$  necesaria para estudiar la dinámica del sistema. Esta transformación está esquematizada en la Figura 6.2.



**Figura 6.2:** Esquema de acoplamiento *qubit*-cavidad débil

La densidad espectral efectiva del baño estructurado resulta

$$J_{eff}(\omega) = \frac{16\kappa g^2 \omega_r^2 \omega}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\kappa \omega_r \omega)^2}, \quad (6.29)$$

siendo óhmica a frecuencias bajas y presentando un pico en la frecuencia del resonador.



# Capítulo 7

## Resultados para cQED con disipación

En el presente capítulo analizamos la dinámica del sistema a partir del Hamiltoniano de Rabi forzado armónicamente teniendo en cuenta efectos de disipación. Este cambio de abordamiento respecto al estudio de la dinámica del sistema cerrado, en donde aplicábamos el modelo de Jaynes-Cummings, se debe principalmente a los siguientes motivos:

- Como vimos en el capítulo 4, cuando se ignoran los efectos del entorno es posible trabajar separadamente con Hamiltonianos efectivos de dimensión 2. En cambio, al considerar la situación más realista, el resonador no se encuentra perfectamente aislado sino que sufre pérdidas de fotones que escapan al entorno. De esa manera los diferentes subespacios de dimensión 2 del Modelo de JC se encuentran ahora conectados debido a los efectos del baño térmico. Como consecuencia, se pierde la característica que constituía el principal atractivo y motivación para estudiar el problema en aproximación de Jaynes-Cummings. Al incluir la disipación se vuelve entonces necesario resolver el problema completo y considerar todos los niveles de energía, de modo que computacionalmente resulta igual de costoso para el Hamiltoniano de Rabi que para el modelo de Jaynes-Cummings.
- Cuando se plantea el estudio del problema de Jaynes-Cummings con disipación como resultado de la aproximación de onda rotante en la interacción *qubit*-resonador, es necesario plantear que la interacción entre el campo electromagnético del resonador y del entorno también se encuentre en aproximación de onda rotante [34, 35]. Esto se debe a una cuestión de consistencia en las aproximaciones. Es decir que debemos reemplazar el término  $(a + a^\dagger)(b_n + b_n^\dagger)$  introducido en la sección 6.4 por  $(a b_n^\dagger + a^\dagger b_n)$ . En ese caso, ya no se tiene una interacción de la forma  $A \otimes B$ , con  $A$  y  $B$  observables del sistema y el baño, respectivamente. Esto complejiza la forma que adopta la ecuación maestra, representando una

dificultad técnica para el planteo del problema numérico a resolver.

- Como vimos en la sección 3.2, existen diferentes condiciones que limitan el régimen de validez de la aproximación de Jaynes-Cummings. Esta aproximación está justificada cuando se trabaja en un rango de forzamiento donde  $\epsilon(t)$  se halla restringido en la vecindad de la frecuencia del resonador  $\omega_r$ . Adicionalmente fue necesario suponer que  $\omega_r \gg \Delta$  para que el efecto del término  $\frac{\Delta}{2}\sigma_x$  sea despreciable. Este término mezcla estados que difieren en el estado del *qubit* pero no en el número de fotones, de manera que no conserva el número de excitaciones del sistema y su por lo tanto hace que se mezclen lo que considerábamos como subespacios separados de dimensión 2. Como consecuencia, esto permite que se cree entrelazamiento entre un mayor número de estados del *qubit*-resonador, siendo el entrelazamiento uno de los principales recursos que se intenta conseguir en el planteo de arquitecturas aplicables en Computación Cuántica.
- Experimentalmente existe un amplio rango de valores para los parámetros de los *qubits* y guías de onda. En particular, hay casos en los que no se cumple la condición de que el tamaño del *gap* del *qubit* sea mucho menor que la frecuencia del resonador  $\omega_r \gg \Delta$ . Por lo tanto en esos casos el modelo de Jaynes-Cummings no está justificado.

En lo que sigue analizaremos la probabilidad de medir el *qubit* en estado  $|\uparrow\rangle$  si inicialmente fue preparado en el estado  $|\downarrow\rangle$  con el resonador en el estado vacío  $|0\rangle$ . Mostramos los resultados en mapas como función de los parámetros del forzamiento  $\epsilon_0$  y  $A$ . No estudiaremos la probabilidad instantánea sino que estamos interesados en considerar el promedio en un período del forzamiento, pues esa es la forma en que se trabaja experimentalmente, esto permitirá entender los patrones de resonancias debido a la estructura de niveles en el caso aislado. Seguidamente analizaremos los efectos producidos al considerar la situación más realista, en la que el resonador no está perfectamente aislado, sino que sufre de una pérdida de fotones que escapan al entorno. En esta situación expondremos resultados para el régimen asintótico y para tiempos finitos.

Tomaremos los parámetros adimensionalizados: Frecuencia del forzamiento  $\omega = 0,003$ , *gap* del *qubit*  $\Delta = 0,0003$ , frecuencia del resonador  $\omega_r = 0,08$  y parámetro de disipación del baño óhmico  $\kappa = 0,001$ . Consideramos que el baño se encuentra en un estado térmico a  $T = 0,0014$  (correspondiente a  $20\text{ mK}$ ). Estos parámetros son consistentes con los reportados en la referencia [16].

Existen dos contribuciones importantes a los patrones de espectroscopía: Las transiciones de LZS mediadas a través de los cruces evitados del espectro de energía y los procesos de relajación en las regiones intermedias entre cruces evitados producidos por efecto de la disipación [24].



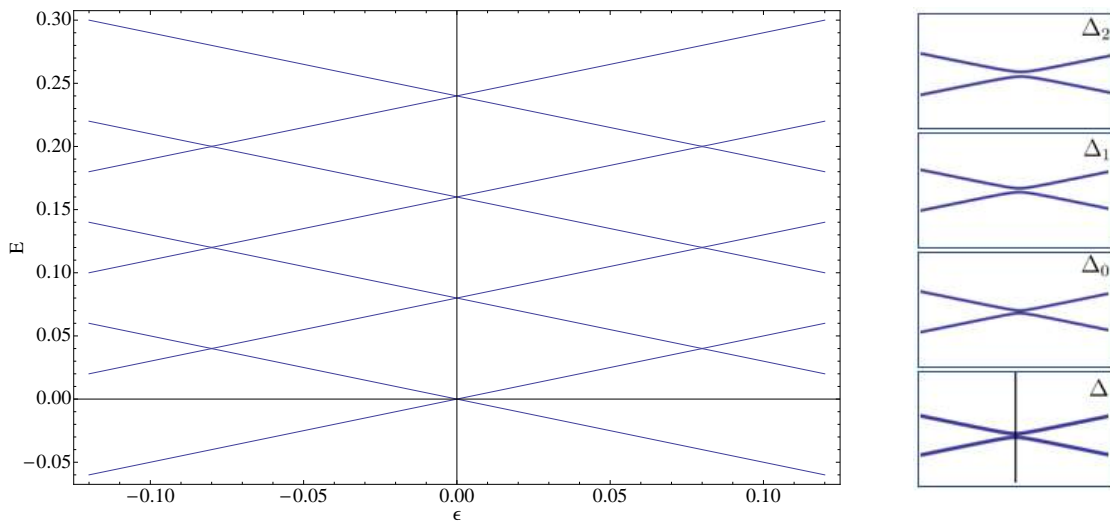
Mostraremos resultados para dos valores diferentes de la constante de acoplamiento *qubit*-resonador:

- $g = 0,00015$ : En este caso todos los cruces evitados se corresponden con el régimen de forzamiento rápido ( $A\omega \gg \Delta_n^2$ ) y por lo tanto los patrones de resonancia observados tienen forma de lóbulos alrededor de valores  $\epsilon_0$  determinados.
- $g = 0,009$ : Al aumentar la constante de acoplamiento por un factor 60, los *gaps* fotónicos en  $\epsilon = \pm\omega_r$  incrementan notablemente su magnitud ya que son proporcionales a  $g$  ( $\Delta_n \approx 2\hbar g\sqrt{n+1}$ ). De esta manera, esos cruces evitados corresponden ahora al régimen de forzamiento lento ( $A\omega < \Delta_n^2$ ).

Comenzamos aplicando el esquema explicado en la subsección 6.4.1, en el cual consideramos el resonador como parte del sistema cuántico que está en contacto con el baño térmico. Este planteamiento es válido para cualquier valor de la constante de acoplamiento *qubit*-resonador. Seguidamente compararemos los resultados para el caso  $g = 0,00015$  con los que se obtienen al aplicar el esquema que considera el resonador como parte del baño, haciendo un mapeo a un baño estructurado (explicado en la subsección 6.4.2).

## 7.1. Resultados con $g=0.00015$

La Figura 7.1 muestra el espectro del Hamiltoniano de Rabi tomando  $g = 0,00015$  y considerando los primeros 8 niveles de energía.



**Figura 7.1:** (Izquierda) Energías del Hamiltoniano del sistema *qubit*+resonador truncado, tomando  $g = 0,00015$  y  $\Delta = 0,0003$ . (Derecha) Ampliación de los cruces evitados del espectro

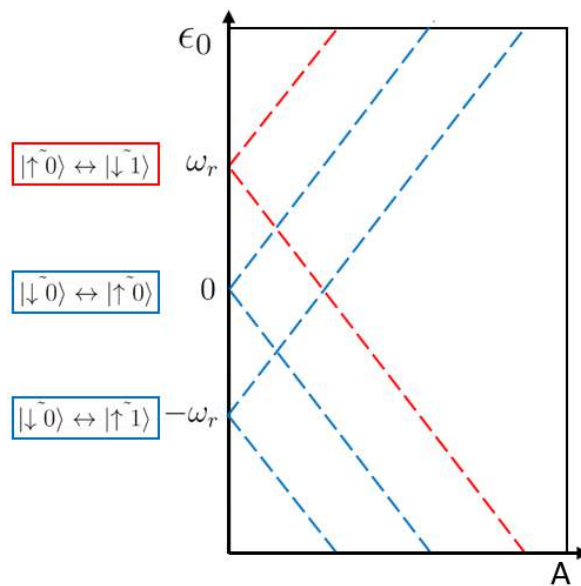
En este gráfico se pueden apreciar los siguientes cruces evitados:

- De magnitud  $\Delta$  en  $\epsilon = 0$ , conectando los estados  $|\downarrow n\rangle$  (línea recta descendente) y  $|\uparrow n\rangle$  (línea recta ascendente)
- De magnitud  $\Delta_n^{-1}$  en  $\epsilon = -\omega_r$ , conectando los estados  $|\downarrow n\rangle$  (línea recta descendente) y  $|\uparrow n+1\rangle$  (línea recta ascendente)
- De magnitud  $\Delta_n^1$  en  $\epsilon = \omega_r$ , conectando los estados  $|\uparrow n\rangle$  (línea recta ascendente) y  $|\downarrow n+1\rangle$  (línea recta descendente)

Para entender la contribución de los diferentes *gaps* a los patrones espectroscópicos basta con concentrarnos en los 3 niveles de menor energía, que se encuentran conectados por los siguientes cruces evitados:

- El *gap* de magnitud  $\Delta$  separa el primer nivel del segundo en  $\epsilon = 0$  y tiende a causar transiciones  $|\widetilde{\downarrow 0}\rangle \leftrightarrow |\widetilde{\uparrow 0}\rangle$  para  $\epsilon_0 = m\omega$ .
- El *gap* de magnitud  $\Delta_{n=0}^{-1}$  separa el segundo nivel del tercero en  $\epsilon = -\omega_r$  y tiende a causar transiciones  $|\widetilde{\downarrow 0}\rangle \leftrightarrow |\widetilde{\uparrow 1}\rangle$  para  $\epsilon_0 = -\omega_r + m\omega$ .
- El *gap* de magnitud  $\Delta_{n=0}^1$  separa el segundo nivel del tercero en  $\epsilon = \omega_r$  y tiende a causar transiciones  $|\widetilde{\uparrow 0}\rangle \leftrightarrow |\widetilde{\downarrow 1}\rangle$  para  $\epsilon_0 = \omega_r + m\omega$ .

La Figura 7.2 esquematiza las regiones en donde se espera encontrar resonancias asociadas a cada uno de los cruces al graficar la probabilidad de transición promediada en un período como función de los parámetros del forzamiento  $\epsilon_0$  y  $A$ .



**Figura 7.2:** Diagrama de las regiones en donde se espera observar resonancias asociadas a los diferentes cruces evitados del espectro de energías en los mapas de probabilidad de transición promediada en un período como función de los parámetros del forzamiento  $\epsilon_0$  y  $A$ .

Como hemos explicado, los diferentes cruces evitados del espectro energético contribuyen a los patrones de resonancias cuando el forzamiento es tal que  $\epsilon(t)$  pasa por el entorno del cruce correspondiente, es decir que dado un valor de  $\epsilon_0$  existe una amplitud mínima del forzamiento necesaria para que se observen resonancias en el plano  $\epsilon_0 A$ . Esto se ve en los mapas como una envolvente triangular que limita la región donde se espera encontrar resonancias.

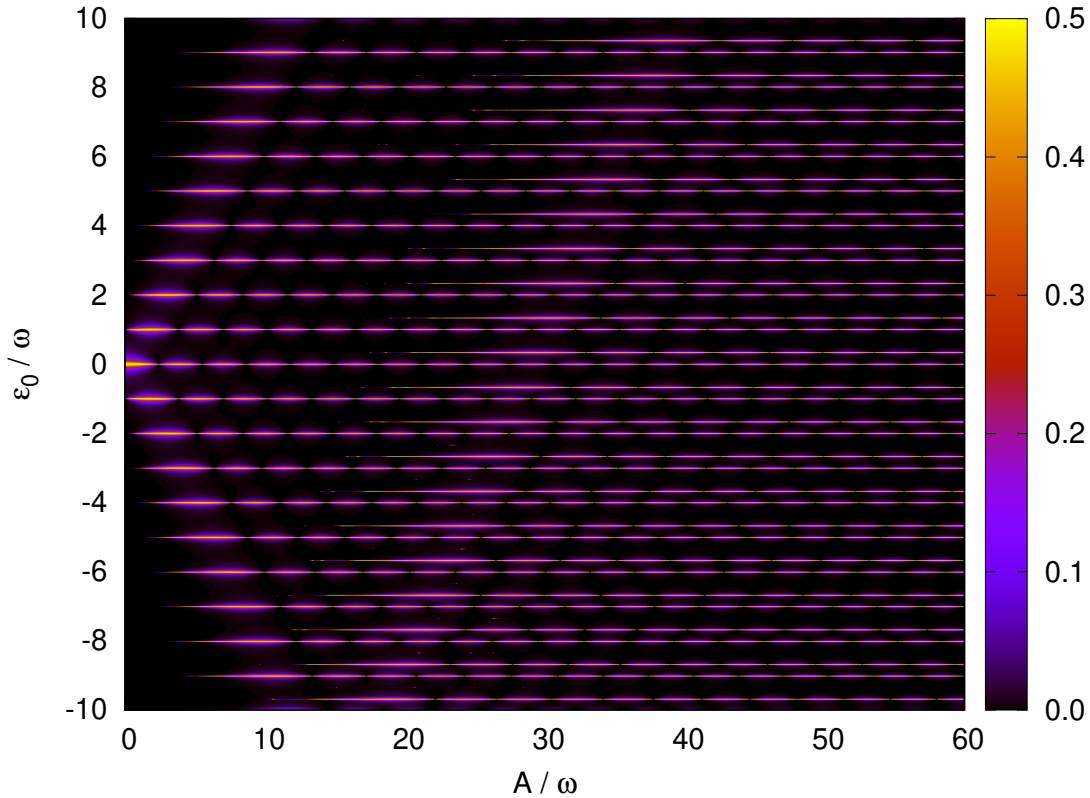
Recordamos que en la situación de forzamiento rápido ( $A\omega \gg \Delta^2$ ) un cruce evitado media una transición entre los dos niveles involucrados cuando la diferencia entre sus energías es un múltiplo de la frecuencia de forzamiento, es decir cuando  $E_+ - E_- = m\omega$ . En un espectro como éste, se produce una competencia (coordinación) entre los diferentes cruces evitados para suprimir (fortalecer) la transición neta entre pares de niveles de energía cualesquiera [24].

Consideremos dos niveles de energía  $E_1$  y  $E_2$  no necesariamente consecutivos. Si el forzamiento es tal que en el intervalo  $(\epsilon_0 - A, \epsilon_0 + A)$  hay un conjunto de cruces evitados que conecta sucesivamente niveles entre sí y me permite llegar de  $E_1$  a  $E_2$ , entonces ese conjunto de cruces evitados va a inducir transiciones entre ambos niveles energéticos siempre que  $E_1 - E_2 = m\omega$ . Cuando es necesario un único cruce para ir de  $E_1$  a  $E_2$  decimos que se trata de una **transición directa**, mientras que cuando se atraviesa más de un *gap* la transición se dice **indirecta**.

En nuestro análisis consideramos el estado inicial *qubit*-resonador  $|\downarrow 0\rangle$  y estamos interesados en todas las transiciones al estado  $|\uparrow\rangle$  del *qubit*. De esta manera, tendremos que para valores pequeños de  $\epsilon_0$  y  $A$  únicamente se va a visitar el cruce en  $\epsilon = 0$  y observaremos simplemente la estructura de resonancias con forma de lóbulos para  $\epsilon_0 = m\omega$ , debido a las transiciones  $|\widetilde{\downarrow 0}\rangle \rightarrow |\widetilde{\uparrow 0}\rangle$  inducidas en forma directa por ese *gap*. Al aumentar  $A$ , se llega a visitar el cruce en  $\epsilon = -\omega_r$  induciendo las transiciones también directas  $|\widetilde{\downarrow 0}\rangle \rightarrow |\widetilde{\uparrow 1}\rangle$ , observando así la aparición de nuevos lóbulos en  $\epsilon_0 = -\omega_r + m\omega$ . Por el contrario, la visita al *gap* en  $\epsilon = \omega_r$  tiende a suprimir las transiciones al estado final  $|\uparrow\rangle$  (ver Figura 7.2). Esto se debe a que mientras el sistema tiene una probabilidad de transición  $|\widetilde{\downarrow 0}\rangle \rightarrow |\widetilde{\uparrow 0}\rangle$  cuando pasa por el cruce  $\Delta$  en  $\epsilon = 0$ , luego cuando llega al cruce  $\Delta_{n=0}^1$  en  $\epsilon = \omega_r$  se favorece la transición  $|\widetilde{\uparrow 0}\rangle \rightarrow |\widetilde{\downarrow 1}\rangle$  de manera que en forma neta se suprimen las transiciones al estado  $|\uparrow\rangle$ .

Para un rango de amplitudes suficientemente grande, se puede llegar a visitar en forma indirecta el cuarto nivel energético, y por lo tanto inducir transiciones  $|\widetilde{\downarrow 0}\rangle \rightarrow |\widetilde{\uparrow 1}\rangle$  cuando  $\omega_r + \epsilon_0 = m\omega$ . Estas resonancias se conocen como transiciones de *sideband* [16].

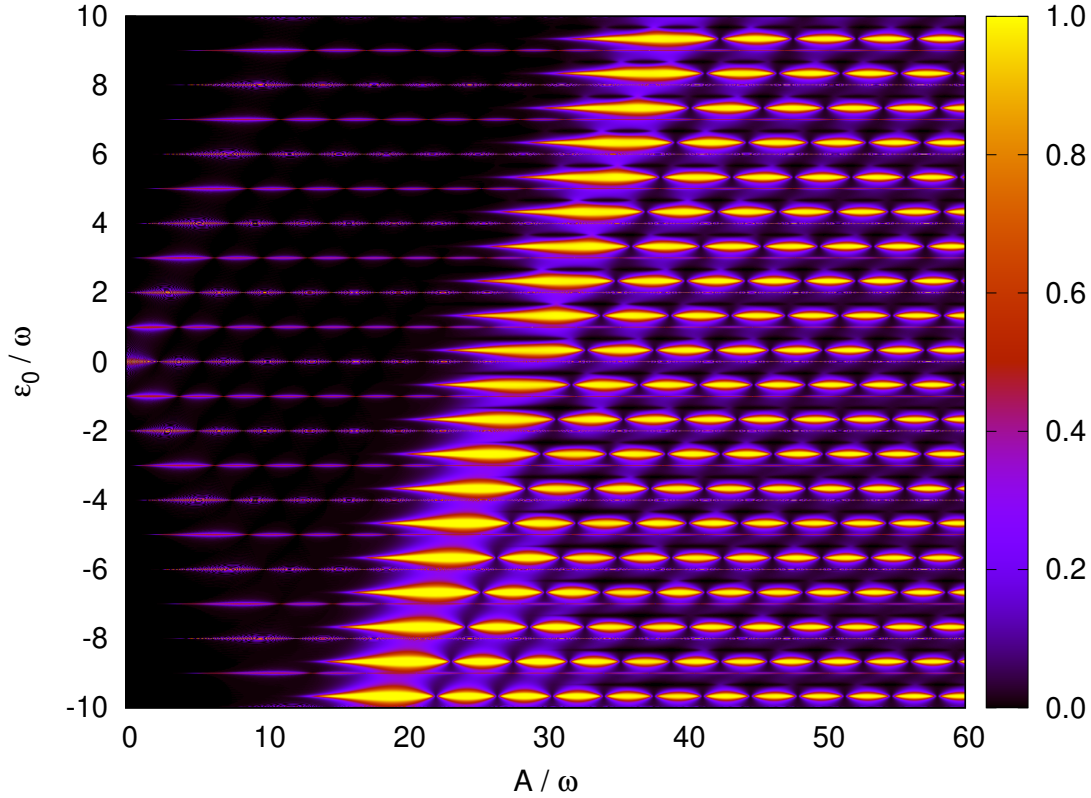
La Figura 7.3 muestra el mapa espectroscópico que se obtiene por el forzamiento armónico del sistema. En este gráfico podemos reconocer las contribuciones a las transiciones con estado final  $|\uparrow\rangle$  mediadas por los dos *gaps* de magnitud  $\Delta$  ubicados en  $\epsilon = 0$  (en forma directa e indirecta) y por el *gap*  $\Delta_n^{-1} = 0$  en  $\epsilon = -\omega_r$ . La probabilidad máxima de transición se produce en las resonancias antes explicadas, alcanzan el valor  $1/2$ .



**Figura 7.3:** Probabilidades de transición promediadas en un período del forzamiento para el caso sin disipación, en función de  $A$  y  $\epsilon_0$ , con parámetros  $g = 0,00015$ ,  $\Delta = 0,0003$  y  $\omega_r = 0,08$

A continuación estudiaremos cómo se modifican estos patrones de resonancia como consecuencia de la disipación. Los niveles superiores del espectro no son estables debido a la pérdida de fotones en el resonador y por lo tanto tienden a decaer a los niveles fundamentales de menor energía, que esencialmente corresponden los autoestados  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  del *qubit* con 0 fotones en la cavidad, más contribuciones menores de otros estados de la base producto debido al acoplamiento *qubit*-resonador. Aquí destacamos que en el Hamiltoniano de Rabi, estos dos niveles de menor energía son los que se encuentran menos mezclados con el resto ya que los elementos de matriz que conectan  $|\downarrow 0\rangle$  y  $|\uparrow 0\rangle$  con los demás estados son menos y de menor magnitud que en el resto de la matriz hamiltoniana. Los procesos de relajación van a producir transiciones en las regiones intermedias entre cruces evitados del espectro entre estados que difieren en el número de fotones pero tienen el mismo estado del *qubit*.

La Figura 7.4 muestra los resultados obtenidos para el caso disipativo, a tiempo  $t = 1000\tau$ .

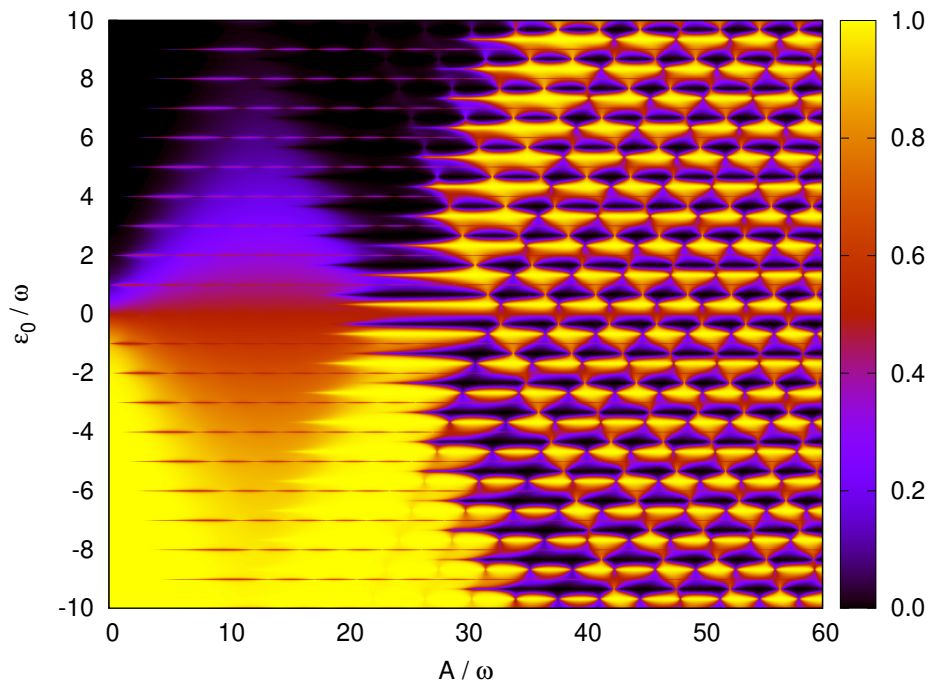


**Figura 7.4:** Probabilidades de transición promediadas en un período del forzamiento para el caso con disipación a tiempo finito  $t = 1000\tau$ , con parámetros  $g = 0,00015$ ,  $\Delta = 0,0003$ ,  $\omega_r = 0,08$ ,  $\kappa = 0,001$  y  $T = 0,0014$

La diferencia fundamental que queremos destacar en este gráfico respecto al caso aislado es que ahora la probabilidad de transición máxima toma un valor de 1 y se produce en las resonancias asociadas a los *gaps* situados en  $\epsilon = -\omega_r$ . Esto significa que allí se produce una transferencia total de la población inicial a estados con el *qubit*  $|\uparrow\rangle$ . Este fenómeno se conoce como inversión de población y está generado en forma conjunta por la contribución del forzamiento armónico y la interacción del sistema con el entorno [16, 36]. Además de aumentar el valor máximo de la transición en esas resonancias, se genera un ensanchamiento muy marcado de los lóbulos debido a los decaimientos  $|\uparrow n\rangle \rightarrow |\uparrow 0\rangle$ , indicando que es alrededor de esos valores de  $\epsilon_0$  que se vuelve efectivo el mecanismo del entorno para enviar el sistema al estado de menor energía  $|\uparrow 0\rangle$ .

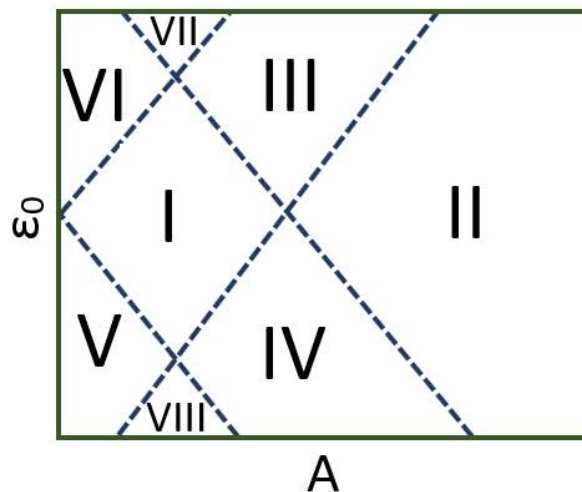
Por otro lado queremos hacer notar también que en las regiones intermedias entre las resonancias ensanchadas se pueden apreciar lóbulos oscuros. Estos se corresponden con las transiciones inducidas por los *gaps* en  $\epsilon_0 = \omega_r$ , los cuales tienden a suprimir en forma neta la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado final  $|\uparrow\rangle$ .

La Figura 7.5 muestra el mapa de probabilidades de transición  $|\downarrow 0\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$  en el régimen asintótico.



**Figura 7.5:** Probabilidades de transición promediadas en un período del forzamiento para el caso con disipación en el régimen asintótico, con parámetros  $g = 0,00015$ ,  $\Delta = 0,0003$ ,  $\omega_r = 0,08$ ,  $\kappa = 0,001$  y  $T = 0,0014$

Aquí podemos ver que el fenómeno de relajación al estado de menor energía debido a la presencia del baño alcanza su máxima eficiencia, extendiéndose ya no sólo alrededor de las resonancias en  $\epsilon_0 = -\omega_r + n\omega$  sino a todo el rango de parámetros. Podemos identificar varias regiones marcadamente diferenciadas de acuerdo a la influencia de los cruces evitados. Esto está esquematizado en la Figura 7.6 y la tabla que le sigue.



**Figura 7.6:** Esquema de regiones observadas en el patrón de resonancias para el régimen asintótico del sistema forzado con disipación

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
gap en $\epsilon = -\omega_r$		•		•				•
gap en $\epsilon = 0$	•	•	•	•				
gap en $\epsilon = \omega_r$		•	•				•	

Primeramente hablaremos de la estructura de diamantes que aparece, la cual ya ha sido observada en el estudio de problemas similares [16, 36]. Existen dos diamantes: uno entre  $A/\omega = 0$  y  $A/\omega = 10$  aproximadamente (región I), y el otro a partir de  $A/\omega = 10$  (región II).

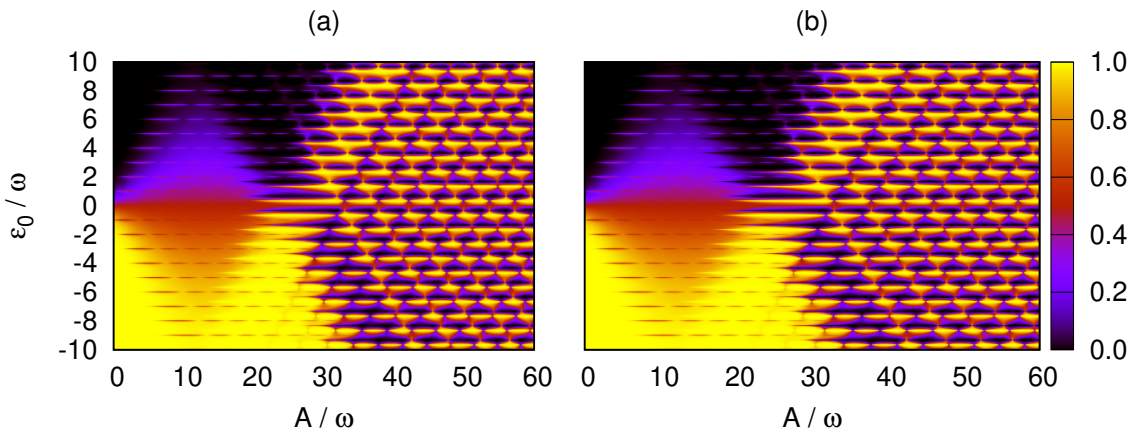
En el interior del primer diamante sólo está presente la influencia de los cruces de magnitud  $\Delta$  en  $\epsilon = 0$ . Allí podemos identificar en forma muy clara la relajación al estado de menor energía debido al entorno. Para valores de  $\epsilon_0$  positivos el fundamental es  $|\downarrow 0\rangle$  mientras que para  $\epsilon_0$  negativo es  $|\uparrow 0\rangle$ . Por esa razón las transiciones observadas en el gráfico son mayores o menores que 0,5 de acuerdo al signo de  $\epsilon_0$ .

En el segundo diamante podemos apreciar un patrón de lóbulos brillantes con probabilidad de transición máxima igual a 1 en las resonancias  $\epsilon_0 = -\omega_r + m\omega$ . Estas regiones de alta probabilidad de transición están intercaladas con lóbulos oscuros que presentan probabilidad de transición mínima igual a 0, centrados en las resonancias  $\epsilon_0 = \omega_r + m\omega$ . El marcado ensanchamiento de los lóbulos brillantes debido a los efectos de relajación hace que los mismos se conecten entre sí en los puntos donde los lóbulos oscuros presentan destrucción coherente del *tunneling*.

Entre los diamantes recién descritos podemos hallar una zona intermedia correspondiente a la región III (región IV) en donde se aprecian las resonancias de probabilidad máxima igual a 1/2 debidas a los *gaps*  $\Delta$  en  $\epsilon = 0$ . Entre esas resonancias se puede ver también la contribución de lóbulos oscuros (brillantes) mediados por los *gaps*  $\Delta_n^1$  ( $\Delta_n^{-1}$ ) en  $\epsilon = \omega_r$  ( $\epsilon = -\omega_r$ )

### 7.1.1. Comparación con el abordamiento de baño estructurado

En la Figura 7.7 comparamos los resultados obtenidos para la probabilidad de transición promediada en un período del forzamiento en el régimen asintótico, obtenidos para los parámetros  $g = 0,00015$  y  $\Delta = 0,0003$ , aplicando las metodologías explicadas en las subsecciones 6.4.1 y 6.4.2.



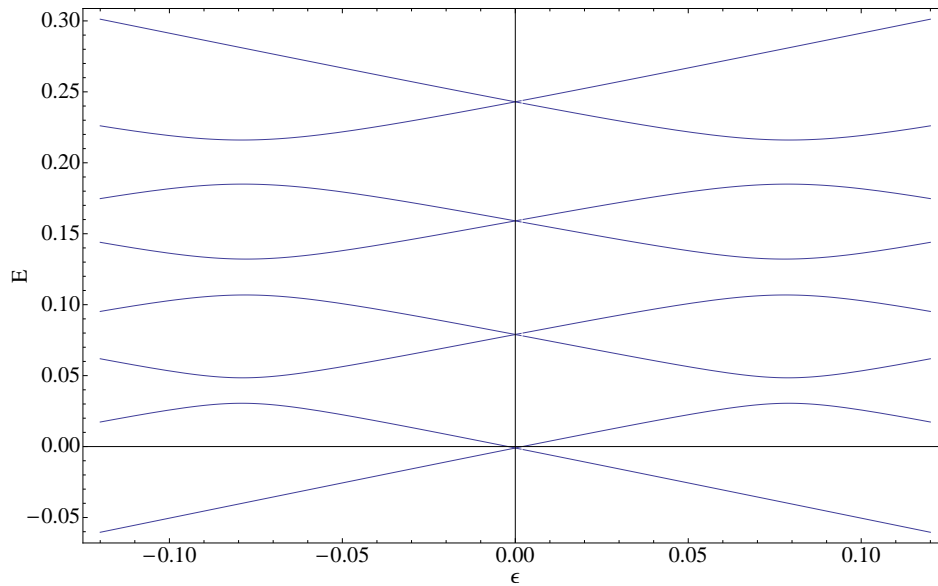
**Figura 7.7:** Probabilidades de transición promediadas en un período del forzamiento para el caso con disipación en el régimen asintótico, con parámetros  $g = 0,00015$ ,  $\Delta = 0,0003$ ,  $\omega_r = 0,08$ ,  $\kappa = 0,001$  y  $T = 0,0014$ . En (a) se incluyó al resonador como parte del sistema y se realizó un truncamiento del Hamiltoniano. En (b) se consideró que el resonador formaba parte del baño y se realizó un mapeo exacto a un baño estructurado.

Vemos una coincidencia perfecta entre ambos gráficos. Dado que el mapeo al baño estructurado es exacto y que la intensidad de acoplamiento *qubit*-resonador cumple con las hipótesis consideradas para aplicar la Ecuación Maestra de Floquet-Born-Markov al *qubit* considerado como sistema, esta concordancia entre ambos métodos sirve como verificación para mostrar que la resolución del problema tomando al resonador como parte del sistema y truncando la cantidad de niveles de energía en 8 es correcta. Podemos inferir a partir de esto que, para los parámetros utilizados, si inicialmente el resonador se encontraba en el estado vacío, el forzamiento no puede generar que en el régimen asintótico haya una cantidad mayor a 3 fotones en el resonador.



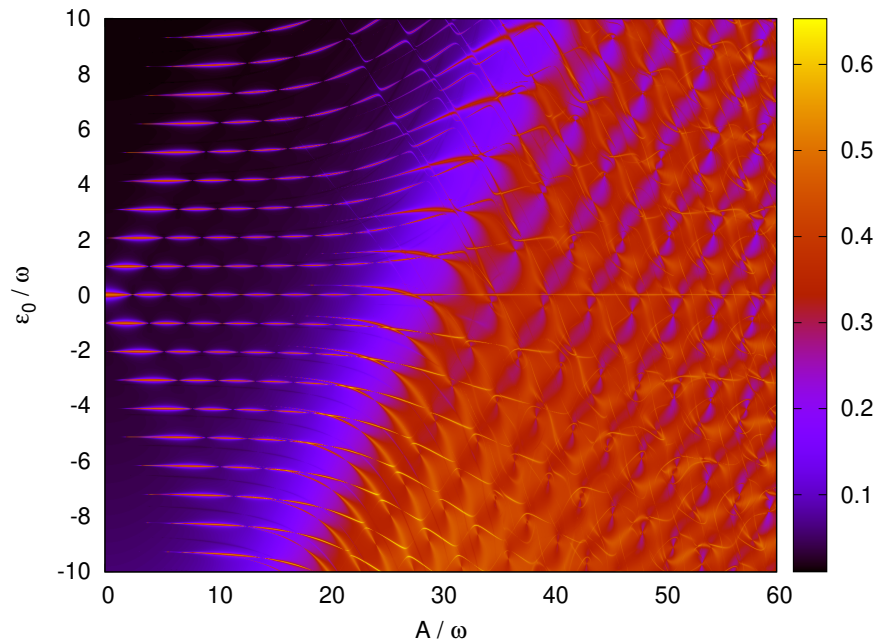
## 7.2. Resultados con $g=0.009$

La Figura 7.8 muestra el espectro del Hamiltoniano de Rabi tomando  $g = 0,009$  y considerando los primeros 8 niveles de energía. Comparando este gráfico con el de  $g = 0,00015$  (Figura 7.1) vemos un notable incremento en el tamaño de los *gaps* fotónicos en  $\epsilon = \pm\omega_r$ .



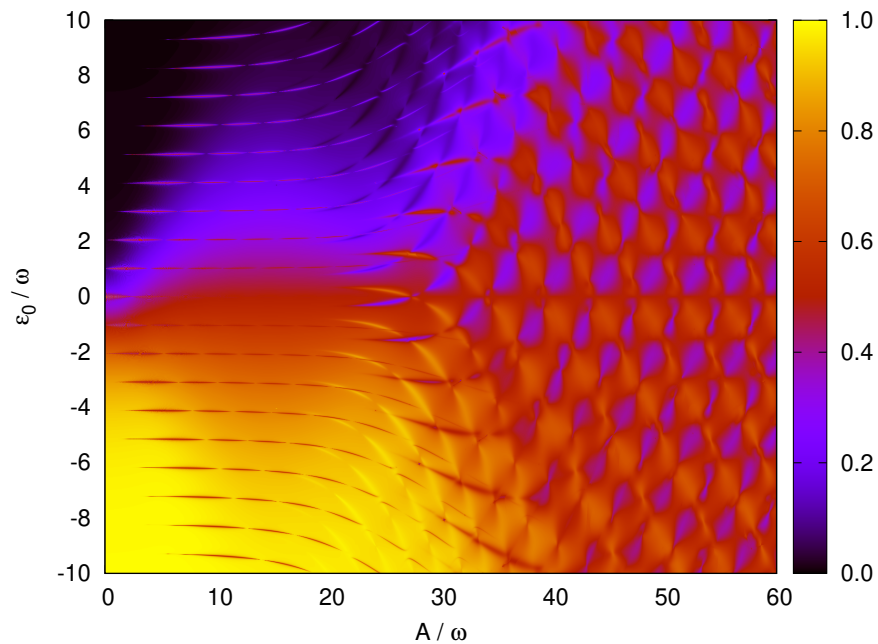
**Figura 7.8:** Energías del Hamiltoniano del sistema *qubit*+resonador truncado, tomando  $g = 0,009$  y  $\Delta = 0,0003$

Debido al aumento en la magnitud de los *gaps* fotónicos, se modifica la forma de las resonancias asociadas, que ahora resultarán arcos concéntricos por tratarse de la situación de forzamiento lento. Esto se puede apreciar en la Figura 7.9 donde mostramos la probabilidad de transición  $|\downarrow 0\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$  promediada en un período del forzamiento para el sistema cerrado. Podemos también reconocer que en esta situación las resonancias correspondientes a diferentes *gaps* se cruzan entre sí, y por lo tanto en algunos puntos la probabilidad de transición al estado  $|\uparrow\rangle$  alcanza valores superiores a  $1/2$ . Otra característica destacable es que ahora los lóbulos asociados al *gap*  $\Delta$  en  $\epsilon = 0$  sufren una desviación para valores de  $A$  grandes, respecto a la condición de resonancia que uno esperaría ( $\epsilon_0 = m\omega_r$ ), debido a la pronunciada influencia de los *gaps* fotónicos en el espectro de energías. En este caso ya no es posible pensar a los niveles de energía como conectados por un conjunto cruces evitados bien diferenciados y separados unos de otros.



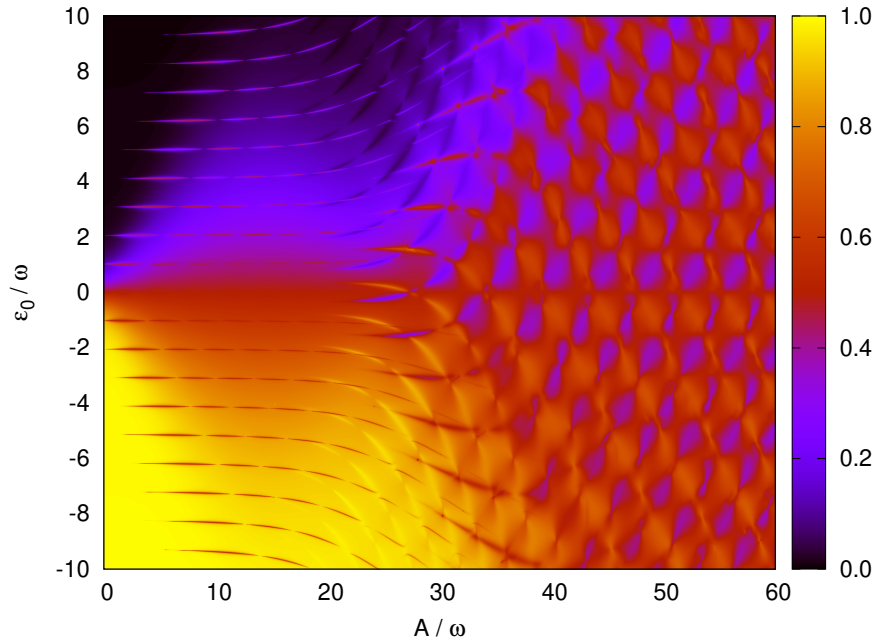
**Figura 7.9:** Probabilidades de transición promediadas en un período del forzamiento para el caso sin disipación, en función de  $A$  y  $\epsilon_0$ , con parámetros  $g = 0,009$ ,  $\Delta = 0,0003$ ,  $\omega_r = 0,08$ ,  $\kappa = 0,001$  y  $T = 0,0014$

Siguiendo el mismo orden que la sección anterior, consideraremos a continuación los resultados con disipación. La Figura 7.10 muestra los resultados obtenidos para el caso disipativo, a tiempo  $t = 1000\tau$ . Notamos un ensanchamiento de las resonancias fotónicas y el ya explicado fenómeno de inversión de población.



**Figura 7.10:** Probabilidades de transición promediadas en un período del forzamiento para el caso con disipación a tiempo finito  $t = 1000\tau$ , en función de  $A$  y  $\epsilon_0$ , con parámetros  $g = 0,009$ ,  $\Delta = 0,0003$ ,  $\omega_r = 0,08$ ,  $\kappa = 0,001$  y  $T = 0,0014$

Finalmente, en la Figura 7.11 exponemos los resultados para el régimen asintótico. Aquí podemos diferenciar las mismas regiones de I a VIII que habíamos utilizado en la sección anterior para clasificar y describir las distintas contribuciones a los patrones de resonancias. La diferencia está en que en este caso la forma de las resonancias debidas a *gaps* fotónicos es de arcos en lugar de lóbulos, y que todo el panorama se ve deformado.



**Figura 7.11:** Probabilidades de transición promediadas en un período del forzamiento para el caso con disipación en el régimen asintótico, con parámetros  $g = 0,009$ ,  $\Delta = 0,0003$ ,  $\omega_r = 0,08$ ,  $\kappa = 0,001$  y  $T = 0,0014$

Como última observación queremos destacar la marcada similitud entre los patrones de resonancias para el régimen asintótico y a tiempo finito  $t = 1000\tau$ . Esto es evidencia de que cuando la intensidad del acoplamiento *qubit*-resonador corresponde a USC, el sistema alcanza el estado asintótico más rápidamente. Sería de interés analizar la dinámica en tiempos intermedios.



# Capítulo 8

## Conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos analizado la dinámica de un sistema físico conformado por un *qubit* superconductor de flujo sujeto a un forzamiento armónico en el flujo magnético y acoplado capacitivamente a una guía de transmisión de microondas, la cual se comporta como un resonador fotónico. En particular hemos obtenido resultados numéricos y analíticos considerando dos escenarios posibles para este sistema cuántico:

- El caso ideal en ausencia de disipación: consideramos el Modelo de Jaynes-Cummings forzado para describir la interacción *qubit*-resonador y resolvemos la dinámica del sistema compuesto mediante el Formalismo de Floquet. En este esquema fue posible dividir el Hamiltoniano total en bloques independientes de  $2 \times 2$ . Demostramos que cada uno de estos subespacios presenta un comportamiento equivalente al de un *qubit* efectivo en el cual el tamaño del cruce evitado entre los dos niveles de energía de los estados involucrados depende del número de fotones y la intensidad del acoplamiento *qubit*-resonador. Realizamos un estudio de las transiciones entre los estados  $|\uparrow n\rangle \leftrightarrow |\downarrow n+1\rangle$ . En particular hicimos un análisis de las oscilaciones de Rabi generalizadas entre las poblaciones de ambos niveles en función de los parámetros propios del sistema y del forzamiento armónico aplicado. También estudiamos los patrones de resonancia que se observan en los mapas espectroscópicos obtenidos por Interferometría de Landau-Zener-Stückelberg, considerando la probabilidad de transición promediada en un período del forzamiento. En todos los casos observamos concordancia entre los resultados numéricos exactos y las predicciones obtenidas analíticamente al aplicar una aproximación de onda rotante a la dinámica del sistema.
- El caso más realista en que el sistema interactúa con el entorno y como consecuencia el resonador sufre pérdidas de fotones: consideramos una interacción tipo Rabi entre el *qubit* y resonador y utilizamos la Ecuación Maestra de Floquet-Born-Markov para resolver la evolución temporal. Hemos estudiado los mapas espectroscópicos de probabilidad de transición  $|\downarrow 0\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$  promediada en un

período del forzamiento. Realizamos un análisis de los patrones de resonancias observados teniendo en cuenta la contribución de los diferentes cruces evitados que presenta el espectro de energías estático debidos al resonador y al *gap* del *qubit*. Mostramos cómo este patrón se ve afectado por los efectos de disipación en el régimen asintótico y a tiempo finito, respecto a los resultados observados en el sistema aislado. En primer lugar analizamos el régimen de acoplamiento fuerte *qubit*-resonador. En este caso, los patrones de interferometría mostraron consistencia con los obtenidos cuando se mapea el resonador y el entorno electromagnético a un baño estructurado. Adicionalmente consideramos el régimen de acoplamiento ultrafuerte (USC), el cual se ha podido realizar experimentalmente en los últimos años y despierta enorme interés por sus potenciales aplicaciones en Computación Cuántica y por la gran variedad de fenómenos físicos novedosos que presenta[10].

Durante largo tiempo en el área de Sistemas Cuánticos Abiertos se dedicó especial atención al estudio de sistemas con disipación óhmica debido al contacto con un baño bosónico en estado térmico. Hoy en día los avances experimentales hacen posible otros tipos de entornos mediante lo que se conoce como Ingeniería del Ruido, en la cual el entorno no es considerado necesariamente como un elemento indeseable, sino que se realiza un diseño del mismo y de su interacción con el sistema de interés.

Como perspectiva de trabajo futuro sería interesante el estudio del sistema compuesto por el *qubit* de flujo forzado y acoplado a la guía de ondas, para diferentes modelos del entorno. Por ejemplo podría considerarse que el mismo no tiene una densidad espectral óhmica, sino que se trata de un único modo que se encuentra en estado coherente, en acuerdo con los escenarios que se presentan en experimentos de cQED[37]. También resulta de interés el estudio del sistema compuesto por dos *qubits* superconductores acoplados a uno o más resonadores, en concordancia con experimentos que se realizan actualmente. Esta clase de arquitecturas permite la generación de entrelazamiento entre los *qubits* y los fotones del resonador debido al forzamiento externo y la disipación [38-40].

# Agradecimientos

Primeramente quisiera agradecer a mi familia: a mis padres Marcelo y Alejandra, por acompañarme y apoyarme siempre, a mis abuelos Rogelio y Nidia, que durante mi infancia me cuidaron todas las tardes cuando iba a jugar a su casa y también me llevaron siempre al parque, haciendo que tuviera una infancia muy feliz. Asimismo agradezco a mis hermanos Marce y Eugenio, y a mis otros abuelos Laura y Carlos.

También quisiera expresar mi agradecimiento a Majo y a Mingo, por dirigirme en la maestría y especialmente por tenerme paciencia! Es sorprendente todo lo que aprendí en tan poco tiempo. Gracias también a Anita, por todas las charlas que tuvimos en su oficina sobre Cuántica, códigos y la vida.

Hay muchas más personas que conocí en el camino y que son muy importantes para mí. Marcos Atala, quien me entrenó incansablemente durante años para Olimpiadas Matemáticas y que siempre va a ser una referencia para mí. Marcos Ferreyra, que me enseñó consejos realmente valiosos, tanto académicos como no académicos. Mauro Schilman y Sebastián Prillo, ambos también entrenadores durante las Olimpiadas. Gracias a Pablo Bähler, por confiar en mí y reavivar mis intenciones de ingresar al Instituto Balseiro. En estos años en Bariloche he podido hacer muy buenos amigos: Juan Manuel González, Raimel Medina Ramos, Néstor Haberkorn, Yasuo Oda, Lucas Daguerre, Roberto Avalos, Hernán Fernández García. . . A todos les agradezco por ser un gran apoyo en momentos de estudio o de diversión y porque siempre es mejor trabajar en equipo para lo que sea. También agradezco haber tenido profesores muy buenos que supieron transmitir un gran entusiasmo por lo que hacen. Gracias a Julián Sereni, quien es un ejemplo a seguir como investigador y persona, por su espíritu vivaz y su admirable actitud hacia la Física. Quisiera además dar las gracias a Manuel O. Cáceres, su curso de Procesos Estocásticos fue sumamente interesante y divertido! Y también a Adrián Budini por enseñarme a usar el *Mathematica*! Eso marcó un antes y un después.

Quisiera hacer aquí mención especial a un gran amigo que tuve el privilegio de conocer y que tuvo una enorme influencia en mí, sobretodo en estos últimos tiempos, no sólo en cuanto a música y películas, sino también respecto a la Física. Extraño va a ser el día que conozca a alguien que sienta más pasión y entusiasmo por la Física, por las Teorías de Campos y por Feynman, y que demuestre mayor admiración por aquellos

científicos que con humildad y honestidad hicieron aportes titánicos al entendimiento que la humanidad tiene de la Naturaleza, pero que aún así piden un café como cualquier otra persona y se lo toman charlando frente a Beck antes de seguir trabajando. Con todo esto ni hace falta poner el nombre de la persona a quien me estoy refiriendo, pero a los físicos la completitud siempre nos pareció importante, así que muchas gracias Hansen! Por todo!

Por último agradezco a la CNEA y a todos los argentinos, por haberme dado la posibilidad de estudiar becado en el Instituto Balseiro, teniendo una formación única y pudiendo hacer lo que más me gusta.

A quien no le agradezco es a John Hasbrouck van Vleck, Premio Nobel de Física 1977 que curiosamente cumple años el mismo día que yo. Lo lamento por él, pero intentar aplicar sus métodos perturbativos numéricamente fue de lo más feo y agotador que me tocó alguna vez hacer. De cualquier manera no hay problema! A quien no le guste toparse con cosas que no salen o que requieren esfuerzo, que no se dedique a hacer Ciencia.



# Bibliografía

- <sup>1</sup>A. Acín, I. Bloch, H. Buhrman, T. Calarco, C. Eichler, J. Eisert, D. Esteve, N. Gisin, S. J. Glaser, F. Jelezko, S. Kuhr, M. Lewenstein, M. F. Riedel, P. O. Schmidt, R. Thew, A. Wallraff, I. Walmsley y F. K. Wilhelm, «The quantum technologies roadmap: a European community view», *New Journal of Physics* **20** (2018).
- <sup>2</sup>G. Wendin, «Quantum information processing with superconducting circuits: a review», *Reports on Progress in Physics* **80** (2017).
- <sup>3</sup>R. P. Feynman, «Simulating physics with computers», *International Journal of Theoretical Physics* **21** (1982).
- <sup>4</sup>P. Benioff, «The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines», *Journal of Statistical Physics* **22** (1980).
- <sup>5</sup>D. Deutsch, «Quantum Theory, The Church-Turing principle and the universal quantum computer», *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences* **400** (1985).
- <sup>6</sup>N. K. Langford, «Circuit QED - Lecture Notes», Royal Holloway University of London (2013).
- <sup>7</sup>I. Georgescu, S. Ashhab y F. Nori, «Natural and artificial atoms for quantum computation», *Reports on Progress in Physics* **74** (2010).
- <sup>8</sup>S. Shevchenko, S. Ashhab y F. Nori, «Landau-Zener-Stückelberg interferometry», *Physics Reports* **492**, 1-30 (2010).
- <sup>9</sup>A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. Girvin y R. J. Schoelkopf, «Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation», *Physical Review A* **69** (2004).
- <sup>10</sup>X. Gu, A. Frisk Kockum, A. Miranowicz, Y.-x. Liu y F. Nori, «Microwave photonics with superconducting quantum circuits», *Physics Reports* **718-719**, 1-102 (2017).
- <sup>11</sup>J. Clarke y F. K Wilhelm, «Superconducting quantum bits», *Nature* **453**, 1031-42 (2008).

- <sup>12</sup>R. J. Schoelkopf y S. M. Girvin, «Wiring up quantum systems», *Nature* **451**, 664-669 (2008).
- <sup>13</sup>S. Ashhab, R. Johansson, A. Zagoskin y F. Nori, «Two-level systems driven by large-amplitude fields», *Physical Review A* **75** (2007).
- <sup>14</sup>S. M. Girvin, «Superconducting Qubits and Circuits: Artificial Atoms Coupled to Microwave Photons», (2011).
- <sup>15</sup>F. Yan, S. Gustavsson, A. Kamal, J. Birenbaum, A. P. Sears, D. Hover, T. J. Gudmundsen, D. Rosenberg, G. Samach, S. Weber, J. L. Yoder, T. P. Orlando, J. Clarke, A. J. Kerman y W. D. Oliver, «The flux qubit revisited to enhance coherence and reproducibility», *Nature Communications* **7** (2016).
- <sup>16</sup>A. Ferrón, D. Domínguez y M. J. Sánchez, «Dynamic transition in Landau-Zener-Stückelberg interferometry of dissipative systems: The case of the flux qubit», *Phys. Rev. B* **93** (2016).
- <sup>17</sup>A. Ferrón, D. Domínguez y M. J. Sánchez, «Large-amplitude harmonic driving of highly coherent flux qubits», *Phys. Rev. B* **82** (2010).
- <sup>18</sup>A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt y R. J. Schoelkopf, «Introduction to quantum noise, measurement, and amplification», *Reviews of Modern Physics* **82** (2010).
- <sup>19</sup>D. Braak, «Integrability of the Rabi Model», *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011).
- <sup>20</sup>X. Liu, Q. Liao, G. Fang y S. Liu, «Dynamic generation of multi-qubit entanglement in the ultrastrong-coupling regime», *Scientific Reports* **9** (2019).
- <sup>21</sup>S. J. Bosman, M. F. Gely, V. Singh, A. Bruno, D. Bothner y G. A. Steele, «Multi-mode ultra-strong coupling in circuit quantum electrodynamics», *npj Quantum Information* **3** (2017).
- <sup>22</sup>J. Bourassa, J. Gambetta, A. Jr, O. Astafiev, Y. Nakamura y A. Blais, «Ultrastrong coupling regime of cavity QED with phase-biased flux qubits», *Physical Review A* **80** (2009).
- <sup>23</sup>D. Berns, M. Rudner, S. Valenzuela, K. Berggren, W. Oliver, L. Levitov y T. Orlando, «Amplitude Spectroscopy of a Solid-State Artificial Atom», *Nature* **455**, 51-7 (2008).
- <sup>24</sup>W. D. Oliver y S. O. Valenzuela, «Large-amplitude driving of a superconducting artificial atom», *Quantum Information Processing* **8**, 261-281 (2009).
- <sup>25</sup>J. V. Koski, A. J. Landig, A. Pályi, P. Scarlino, C. Reichl, W. Wegscheider, G. Burkard, A. Wallraff, K. Ensslin y T. Ihn, «Floquet Spectroscopy of a Strongly Driven Quantum Dot Charge Qubit with a Microwave Resonator», *Physical Review Letters* **121** (2018).

- <sup>26</sup>M. Grifoni y P. Hanggi, «Driven Quantum Tunneling», *Phys Rep* **304** (1999).
- <sup>27</sup>W. Wustmann, «Statistical mechanics of time-periodic quantum systems», Tesis doct. (Technische Universität Dresden, 2010).
- <sup>28</sup>H.-P. Breuer y F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, 2.<sup>a</sup> ed. (Oxford University Press, 2002).
- <sup>29</sup>A. O. Caldeira y A. Leggett, «Quantum tunnelling in a dissipative system», *Annals of Physics* **149** (1983).
- <sup>30</sup>M. Goorden, M. Thorwart y M. Grifoni, «Entanglement spectroscopy of a driven solid-state qubit and its detector», *Physical Review Letter* **93** (2018).
- <sup>31</sup>L. Tian, S. Lloyd y T. Orlando, «Decoherence and relaxation of a superconducting quantum bit during measurement», *Phys. Rev. B* **65** (2002).
- <sup>32</sup>X.-T. Liang, «Decoherence and relaxation of a qubit coupled to an Ohmic bath directly and via an intermediate harmonic oscillator», *Chemical Physics Letters* **449** (2007).
- <sup>33</sup>A. Garg, J. Onuchic y V. Ambegaokar, «Effect of friction on electron transfer in biomolecules», *J. Chem. Phys.* **83** (1985).
- <sup>34</sup>L. Mandel y E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge University Press, 1995).
- <sup>35</sup>G. S. Agarwal y R. R. Puri, «Finite-Q cavity electrodynamics: Dynamical and statistical aspects», *Phys. Rev. A* **35** (1987).
- <sup>36</sup>A. L. Gramajo, D. Domínguez y M. J. Sánchez, «Revealing the system-bath coupling via Landau-Zener-Stückelberg interferometry in superconducting qubits», *Physical Review B* **100** (2019).
- <sup>37</sup>F. Yan, D. Campbell, P. Krantz, M. Kjaergaard, D. Kim, J. L. Yoder, D. Hover, A. Sears, A. J. Kerman, T. P. Orlando, S. Gustavsson y W. D. Oliver, «Distinguishing Coherent and Thermal Photon Noise in a Circuit Quantum Electrodynamical System», *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018).
- <sup>38</sup>A. L. Gramajo, D. Domínguez y M. J. Sánchez, «Amplitude tuning of steady-state entanglement in strongly driven coupled qubits», *Phys. Rev. A* **98** (2018).
- <sup>39</sup>M. E. Kimchi-Schwartz, L. Martin, E. Flurin, C. Aron, M. Kulkarni, H. E. Tureci e I. Siddiqi, «Stabilizing Entanglement via Symmetry-Selective Bath Engineering in Superconducting Qubits», *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016).
- <sup>40</sup>S. Shankar, M. Hatridge, Z. Leghtas, K. M. Sliwa, A. Narla, U. Vool, S. M. Girvin, L. Frunzio, M. Hatridge, M. Hatridge, M. Hatridge y M. Hatridge, «Autonomously stabilized entanglement between two superconducting quantum bits», *Phys. Rev. A* **35** (1987).

